Gli insiemi numerici e il principio di induzione

martedì 2 ottobre 2018 10:06

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}$ ✓

PRINCIPIO DI INDUZIONE.

$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0)$ sia $P(n)$ un enunciato. Se

1) $P(n_0)$ è vero (BASE INDUTTIVA)
2) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (Hp induttiva)

Allora $P(n)$ è vera per ogni n.

DIM Usiamo la proprietà che ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ non vuoto ammette minimo.

[P.A] Supponiamo che $\exists\, \tilde{n} \geq n_0 : P(\tilde{n})$ è falsa.

Ciò equivale a dire che l'insieme

$$F = \{ n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è falsa} \} \neq \emptyset$$

$\Rightarrow$ F ammette minimo; sia $\bar{n}$ il minimo di F.

Poiché $P(\bar{n})$ è falsa, non può essere $\bar{n} = n_0$

$\Rightarrow \bar{n} > n_0 \Rightarrow \underbrace{\bar{n} - 1 \geq n_0}$.

Inoltre, per def. di il minimo, $P(\bar{n} - 1)$ è vera!

Ma allora dalla hp induttiva ho: $P(\bar{n} - 1) \Rightarrow P(\bar{n})$ vero!!

$\Rightarrow$ ASSURDO!!

[ES.] SOMMATORIA: $\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

ES.1 **SOMMATORIA:** $\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$$\left(\sum_{j=1}^{4} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \qquad \sum_{k=1}^{3} (k+1) = 2+3+4 \right)$$

Supponiamo di voler calcolare

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

IDEA $(n=100)$ $1+2+3+ \dots + 98 + 99 + 100$

$$\underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101}_{\frac{100}{2} \text{ volte}} = \boxed{101 \cdot \frac{100}{2}}.$$

DIM (P.I.) $P(n): \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

1. BASE IND: $P(1)$ VERA.

2. $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vera.

Assumo che $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

devo dim che $\sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$

del resto: $P(n+1) = \sum_{j=1}^{n} j + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \boxed{\frac{n^2+3n+2}{2}}$$

$\blacksquare$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI:

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \geq -1$ vale

$$P(n): (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq -1$ vale

$$P(n): (1+x)^n \geq 1+nx.$$

DIM (P.I.)

① B.I: $P(1)$: $1+x \geq 1+x$ ✓

② $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$\boxed{(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.}$$

Si: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2$

$\uparrow$ Hp induttiva

$$= 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

■

ES PER CASA:

dim. che se $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, vale $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Sol: Chiamiamo $S_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$. Allora

① B.I. $S(0) \Rightarrow r^0 = 1 = \dfrac{1-r^1}{1-r} = 1$ ✓

② Passo induttivo. Voglio dim. che $S_{n+1} = \dfrac{1-r^{n+2}}{1-r}$.

Scrivo $S_{n+1} = S_n + r^{n+1} = 1+r+r^2+\dots+r^{n+1} = 1+r S_n$.

$$= 1 + r\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1-r+r-r^{n+2}}{1-r} = \boxed{\frac{1-r^{n+2}}{1-r}}$$

Hp induttiva!

■

DEF: Il fattoriale: Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisce:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

DEF: Coefficienti binomiali: dati $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, si def:

(n sopra k) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

OSS: $\binom{n}{k}$ ci dà il numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono formare a partire da n elementi.

ES $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ | s.i. di A con 2 elementi sono:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{120}{12} = 10$$

In effetti b: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}$
$\{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}$
$\{3,4\}, \{3,5\}$
$\{4,5\}$

TEOREMA: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; allora

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

PROPRIETÀ del coeff. BIN:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{k}$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA:

$$1$$
$$1 \quad + \quad 1$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & + & 1 & & & \\
 & & 1 & + & 2 & + & 1 & & \\
 & 1 & + & 3 & + & 3 & + & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Nella n-esima riga del triangolo si trovano i coeff. delle potenze n-esime del binomio con $N = n+1$.

ES: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

TORNANDO AGLI INSIEMI NUMERICI.

$\mathbb{N}$ ✓

$\mathbb{Z} = \pm\mathbb{N} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ✓

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.}$$

PROPRIETÀ di $\mathbb{Q}$. Siano $a, b, c \in \mathbb{Q}$

·) È definita in $\mathbb{Q}$ una operazione detta somma che gode delle seguenti proprietà:

1. COMMUTATIVA: $a+b = b+a$
2. ASSOCIATIVA: $(a+b)+c = a+(b+c)$
3. $\exists$ dell'el. NEUTRO: $\exists$ un elemento detto zero t.c. $a+0 = 0+a$
4. $\exists$ dell'opposto: $\forall a \in \mathbb{Q}$ $\exists$ un elemento indicato con $-a$: $a + (-a) = 0$.

·) È definita anche una op. PRODOTTO:

1. COMMUTATIVA: $a \cdot b = b \cdot a$
2. ASSOCIATIVA: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. $\exists$ dell'el. neutro: $\exists$ un el.

③ $\exists$ dell'el. neutro: $\exists$ un el. detto 1 t.c. $e \cdot 1 = 1 \cdot e = e$

④ $\exists$ dell'el. inverso: $\forall e \neq 0$ $\exists$ un el. detto e^{-1}: $e \cdot e^{-1} = e^{-1} \cdot e = 1$.

⑤ DISTRIBUTIVA: $(a+b) \cdot c = ac + bc$

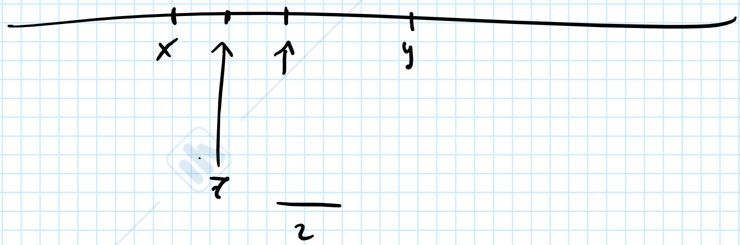
OSS: Queste proprietà definiscono una struttura algebrica che si chiama CAMPO.

Inoltre: $\mathbb{Q}$ è un campo ORDINATO ($\exists$ una rel. di ordine tot.)

- PROPRIETÀ DI DENSITÀ:

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $x < y$, $\exists$ infiniti elementi $z \in \mathbb{Q}$:

$$x < z < y.$$



- PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE:

$\forall x, y > 0$, $x, y \in \mathbb{Q}$, $\exists$ $n \in \mathbb{N}$: $nx \geq y$

- $\mathbb{Q}$ è un insieme NUMERABILE (i.e. posso CONTARE i numeri razionali)

- RAPPRESENTAZIONE DECIMALE

Ogni numero razionale è esprimibile in forma decimale (LIMITATA, o PERIODICA)

$\boxed{\text{... Allora cosa manca a } \mathbb{Q}\text{?}}$