Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE) - 25 novembre 2016

1. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \arctan(x^2)$ nel punto di ascissa 1.

2. Determinare il polinomio di McLaurin di terzo grado della funzione $f(x) = e^x - 1 - \sin(x)$.

3. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{2n}$.

4. Dimostrare che l'equazione $e^{-x^2} = \sin(x)$ ammette un'unica soluzione nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5. Calcolare $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

6. Calcolare $\int_0^\pi x^2 \sin(x^3)\, dx$.

7. Determinare il coefficiente del termine x^3y^2 nello sviluppo di $(3x - y)^5$.

8. Stabilire se la funzione $f(x) = x^3 + \sinh(x)$ è invertibile su $\mathbf{R}$.

9. Stabilire per quali valori di $a > 0$ risulta continua la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \log(x + a) & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

10. Stabilire per quale valore di α risulta finito e non nullo il limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + \sin(n)}{n^\alpha}$.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE) - 25 novembre 2016

Teoria. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale (teorema di valutazione).

Soluzione. Confrontare il libro di testo.

1. (10 punti) Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{|x-1|}}$$

precisandone in particolare: dominio di definizione, segno e zeri, limiti agli estremi del dominio di definizione, eventuali asintoti, derivata, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo relativo o assoluto, eventuali punti di non derivabilità. In caso di esistenza di asintoti obliqui, stabilire se il grafico di f li attraversa in qualche punto. Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \geq 0$, $x \neq 1$, quindi il dominio di f è $[0,1) \cup (1,+\infty)$. In $x = 0$ è nulla, ed è positiva altrove. Quindi 0 è punto di minimo assoluto per f.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty..$$

La retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale per la funzione. La funzione ha asintoto obliquo di equazione $y = x + 1/2$ quando $x \to +\infty$, infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to+\infty} x\Big(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1\Big) = \lim_{x\to+\infty} x\Big(\sqrt{1 + \frac{1}{x-1}} - 1\Big) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Calcolando la derivata prima si ha, per $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}\,\frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}\,\frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2},$$

mentre per $x \in (0,1)$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x^3}}\,\frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}\,\frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}.$$

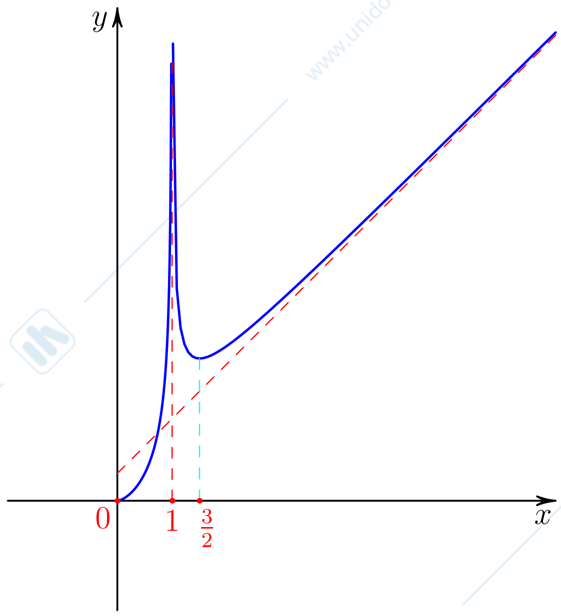
Essendo

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$

esiste la derivata destra in 0, $f'_+(0) = 0$. $f'(x) > 0$ in $(0,1) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ ove f risulta crescente e $f'(x) < 0$ in $(1, \frac{3}{2})$, ove f risulta decrescente. Il punto $x_1 = \frac{3}{2}$ è di minimo locale per f, inoltre $f(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Se $x > 1$ vale

$$f(x) > x + \frac{1}{2},$$

qunidi la funzione non attrraversa l'asintoto obliquo in $(1,+\infty)$. Esiste un punto di intersezione $x_0 \in (0,1)$ tra la funzione e l'asintoto obliquo.



2. (4 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\cos(\sqrt{x}-1) - \mathrm{e}^{x-1}}{\ln x}.$$

Soluzione. Cambiando variabile $y = x - 1$ otteniamo

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\cos(\sqrt{x}-1) - \mathrm{e}^{x-1}}{\ln x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{1+y}-1) - \mathrm{e}^{y}}{\ln(1+y)}.$$

Per $y \to 0$,

$$\sqrt{1+y} - 1 = \frac{y}{2} + o(y),$$

quindi calcolando lo sviluppo di McLaurin delle funzioni coseno ed esponenziale otteniamo

$$\frac{\cos(\sqrt{1+y}-1) - \mathrm{e}^{y}}{\ln(1+y)} = \frac{\cos(y/2 + o(y)) - 1 - y - y^2/2 + o(y^2)}{y + o(y)} = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2 - y - y^2/2 + o(y^2)}{y + o(y)} \sim \frac{-y}{y}.$$

Il limite richiesto è -1.

3. (4 punti)

(a) Al variare del parametro $\alpha \geq 0$ calcolare il limite della successione

$$a_n = n^\alpha \left(\mathrm{e}^{1/n} - \cos\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$$

(b) Nel caso $\alpha = 0$ discutere la monotonia della successione a_n introdotta nel punto (a).

Soluzione. (a) Osserviamo che, per $n \to \infty$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - 1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Quindi, per $n \to \infty$,

$$n^\alpha \left(\mathrm{e}^{1/n} - \cos\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) \sim n^{\alpha-2} \to \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \alpha < 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

(b) Associamo alla successione una funzione $f(t) = e^t - \cos t - \sin t$, per $t \in (0,1]$. Derivando otteniamo, per ogni $t \in (0,1]$,

$$f'(t) = e^t + \sin t - \cos t > \sin t > 0.$$

La funzione f risulta strettamente crescente, sostituendo $t = \frac{1}{n}$ otteniamo che la successione a_n di partenza decresce strettamente.

4. (6 punti) Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \int_{-1}^{1/2} \frac{x+1}{x^2+x+2}\,dx \ , \qquad (b) \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx \ , \qquad (c) \int_0^2 \sqrt{4x^2+1}\,dx \ .$$

Soluzione. (a) Abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\right) + c = F(x) + c,\end{aligned}$$

da cui

$$\int_{-1}^{1/2} \frac{x+1}{x^2+x+2}\,dx = F(1/2) - F(-1) = \frac{1}{2}\ln\frac{11}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{-1}{\sqrt{7}}.$$

(b) Integrando per parti si ottiene

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx,$$

da cui

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\big(e^x \cos x + e^x \sin x\big) + c.$$

Otteniamo quindi

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\big(-e^{\pi} - 1\big).$$

(c) Con la sostituzione $2x = \sinh t$, integrando per parti otteniamo

$$\int \sqrt{4x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int (\cosh t)^2\,dt = \frac{1}{2}\cosh t \sinh t - \frac{1}{2}\int (\sinh t)^2\,dt = \frac{1}{2}\cosh t \sinh t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\int (\cosh t)^2\,dt,$$

da cui

$$\int \sqrt{4x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int (\cosh t)^2\,dt = \frac{1}{4}\cosh t \sinh t + \frac{1}{4}t + c = \frac{1}{4}\Big[2x\sqrt{1+4x^2} + \ln(2x + \sqrt{1+4x^2})\Big] + c.$$

L'integrale richiesto è

$$\int_0^2 \sqrt{4x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\Big[4\sqrt{17} + \ln(4+\sqrt{17})\Big].$$

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE) - 22 febbraio 2016

1. Stabilire se sono linearmente indipendenti i tre vettori $u = (1, 2, 0)$, $v = (1, 1, 1)$, $w = (0, 1, -1)$.
2. Al variare di $\alpha > 0$, determinare il carattere della successione $a_n = (n + \sqrt{n})^\alpha + \frac{(-1)^n}{\sin\frac{1}{n}}$.
3. Disegnare il grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{2/3} - x^{7/5}$.
4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{4 + x^2}$.
5. Stabilire se il grafico della funzione $f(x) = \pi x + \sqrt{x} \arctan x$ ammette un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
6. Calcolare le radici (complesse) seste di -1.
7. Stabilire se è iniettiva l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $L(x, y) = (y, x)$.
8. Determinare il polinomio di McLaurin di terzo grado della funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$.
9. Risolvere il sistema lineare $2x + y = 1$, $x - y = 2$.
10. Stabilire se è diagonalizzabile la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

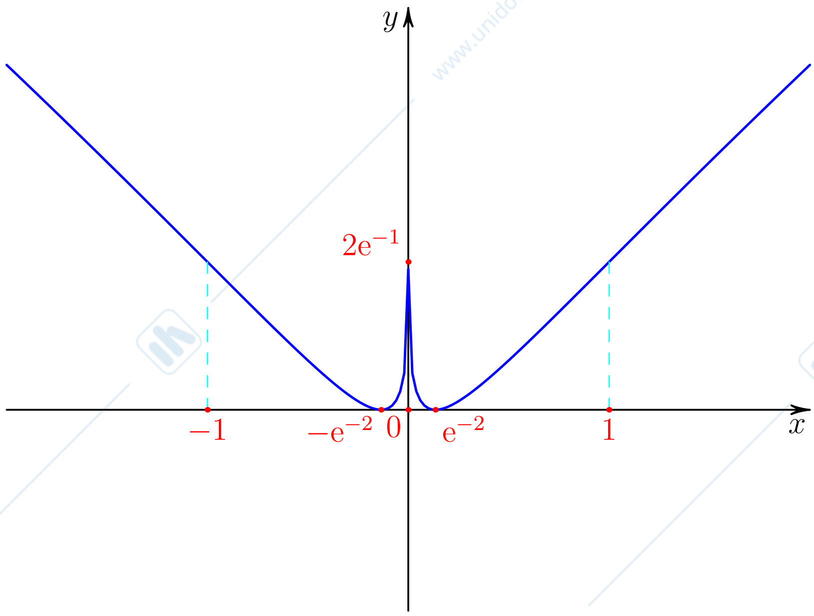
Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE) - 22 febbraio 2016

Teoria. (3 punti) Dare le definizioni di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e derivabile in x_0. Discutere il legame tra le due nozioni.

Soluzione. Confrontare il libro di testo.

1. (9 punti) Si studi la funzione
$$f(x) = \sqrt{|x|}\log(|x|) + \frac{2}{\mathrm{e}},$$
precisandone in particolare: dominio di definizione, simmetrie, limiti agli estremi del dominio di definizione, eventuali asintoti, derivata prima, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo relativo o assoluto, limiti della derivata, eventuali punti di non derivabilità, derivata seconda, concavità e convessità, eventuali punti di flesso. Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 0$ ed è pari, $f(x) = f(-x)$.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{\mathrm{e}}.$$
La funzione f non ammette asintoti obliqui, infatti
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$
Calcoliamo la derivata prima per $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(\frac{1}{2}\log x + 1\Big),$$
per simmetria, per $x < 0$,
$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}\log(-x) - \frac{\sqrt{-x}}{-x} = -\frac{1}{\sqrt{-x}}\Big(\frac{1}{2}\log(-x) + 1\Big).$$
$f'(x) > 0$ sse $x \in (-\mathrm{e}^{-2}, 0) \cup (\mathrm{e}^{-2}, +\infty)$, ove f risulta crescente, mentre $f'(x) < 0$ in $(-\infty, -\mathrm{e}^{-2}, 0) \cup (0, \mathrm{e}^{-2})$, in tali intervalli f decresce. I punti $x = \pm\mathrm{e}^{-2}$ sono di minimo assoluto per f, inoltre $f(\pm\mathrm{e}^{-2}) = 0$. Osserviamo che
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty.$$
La derivata seconda per $x > 0$ è
$$f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{\log x}{x^{3/2}},$$
mentre per $x < 0$,
$$f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{\log(-x)}{(-x)^{3/2}}.$$
Da cui si ricava che è positiva per $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Dunque f è convessa in $(-1, 0) \cup (0, 1)$. f'' è negativa in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, ove f risulta concava. I punti $x = \pm 1$ sono punti di flesso.



2. (4 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x-2} - x + 1}{x^2 \sin^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)}.$$

Soluzione. Cambiamo variabile $t = x - 2$ e calcoliamo il limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^t - t - 1}{(t+2)^2 \sin^2\left(\frac{t}{t+2}\right)}.$$

Essendo, per $t \to 0$,

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \qquad \text{e} \qquad \sin^2\left(\frac{t}{t+2}\right) = \frac{t^2}{4} + o(t^2),$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x-2} - x + 1}{x^2 \sin^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t - t - 1}{(t+2)^2 \sin^2\left(\frac{t}{t+2}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{4\frac{t^2}{4} + o(t^2)} = \frac{1}{2}.$$

3. (6 punti)

(i) Al variare del parametro k discutere la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} x + ky + kz = 1 \\ y - kz = 0 \\ kx + y + z = -1. \end{cases} \tag{1}$$

(ii) Determinare un valore di k per il quale (1) ammette ∞^1 soluzioni. Per tale parametro, calcolare tutte le soluzioni.

Soluzione. (i) Associamo al sistema la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & -k \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ed osserviamo che

$$\det A = 1 + k + k(-k^2 - k) = (1+k)^2(1-k) \neq 0 \qquad \text{sse} \qquad k \neq \pm 1.$$

In tali casi dal Teorema di Cramer deduciamo che esiste un'unica soluzione.

Se $k = 1$, studiamo la matrice

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Essendo $\text{rango} A = 2 < \text{rango}[A|\mathbf{b}] = 3$ il sistema non ammette soluzioni.

Nel caso $k = -1$,

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$\text{rango} A = \text{rango}[A|\mathbf{b}] = 2$. Il sistema ammette ∞^1 soluzioni.

(ii) Nel caso $k = -1$, il sistema (1) è equivalente a

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Da cui $y = -z$ e $x = 1$. Quindi le soluzioni sono della forma

$$(x, y, z) = (1, t, -t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{ovvero} \qquad (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(0, 1, -1), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4. (6 punti) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) giustificare (senza fare conti) il fatto che la matrice A ammette 0 come autovalore;

(ii) giustificare (senza fare conti) il fatto che la matrice A è diagonalizzabile;

(iii) calcolare una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice di passaggio.

Soluzione. (i) La prima e la terza riga della matrice sono uguali, quindi il determinate è nullo e A ammette 0 come autovalore.

(ii) A è una matrice reale e simmetrica, quindi è diagonalizzabile.

(iii) Calcoliamo gli autovalori della matrice, come radici del polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - 1\big) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$$

se e solo se $\lambda = 0, 1, 2$.

Determiniamo gli autovettori. Se $\lambda = 0$, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Otteniamo le soluzioni $(x, y, z) = (t, 0, -t) = t(1, 0, -1)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Se $\lambda = 1$,

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} z = 0 \\ 0 = 0 \\ x = 0. \end{cases},$$

le cui soluzioni sono $(x, y, z) = (0, t, 0) = t(0, 1, 0)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Se $\lambda = 2$,

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

quindi il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -y = 0 \\ x - z = 0. \end{cases},$$

le cui soluzioni sono $(x, y, z) = (t, 0, t) = t(1, 0, 1)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$. Otteniamo una matrice di passaggio:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

relativa alla matrice diagonale simile ad A:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE) - 29 giugno 2016

1. Calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \sinh(x^3)\right) dx$.

2. Calcolare gli autovalori della matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Stabilire se è iniettiva l'applicazione lineare $\Phi(x, y) = (x + 5y, x - 2y, x)$.

4. Nello sviluppo del binomio $(x - 2y)^5$, calcolare il coefficiente del termine x^2y^3.

5. Siano $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$; scrivere i numeri z_1z_2 e z_1/z_2 in forma esponenziale.

6. Determinare il polinomio di McLaurin di quarto grado della funzione $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}$.

7. Risolvere il sistema $x + 3y = 6$, $2x + y = 2$.

8. Stabilire per quale valore di k i tre vettori $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (0, 1, k)$ generano un piano.

9. Stabilire se il grafico della funzione $f(x) = 3x + (x - 1)^7$ attraversa la retta tangente nel punto di ascissa $x = 1$.

10. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{7n + 1}\right)^{n/2}$.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE) - 29 giugno 2016

Teoria. (3 punti) Dare la definizione di funzione integrabile secondo Riemann. Dimostrare che le funzioni monotone sono integrabili.

Soluzione. Confrontare il libro di testo.

1. (9 punti) Si studi la funzione
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\sqrt{|1-x^2|}$$
precisandone in particolare: dominio di definizione, simmetrie, segno e zeri, limiti agli estremi del dominio di definizione, eventuali asintoti, derivata, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo relativo o assoluto, limiti della derivata, eventuali punti di non derivabilità. Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita in $\mathbb{R}$ ed è pari, $f(x) = f(-x)$. $f(x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0$ sse $x = \pm 1$ che risultano essere punti di minimo assoluto.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\big(-2x\sqrt{1-x^2}\big) + \mathrm{e}^{-x^2}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}(3-2x^2), \qquad \text{se } |x|<1.$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\big(-2x\sqrt{x^2-1}\big) + \mathrm{e}^{-x^2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} == \frac{-x\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}(2x^2-3), \qquad \text{se } |x|>1.$$

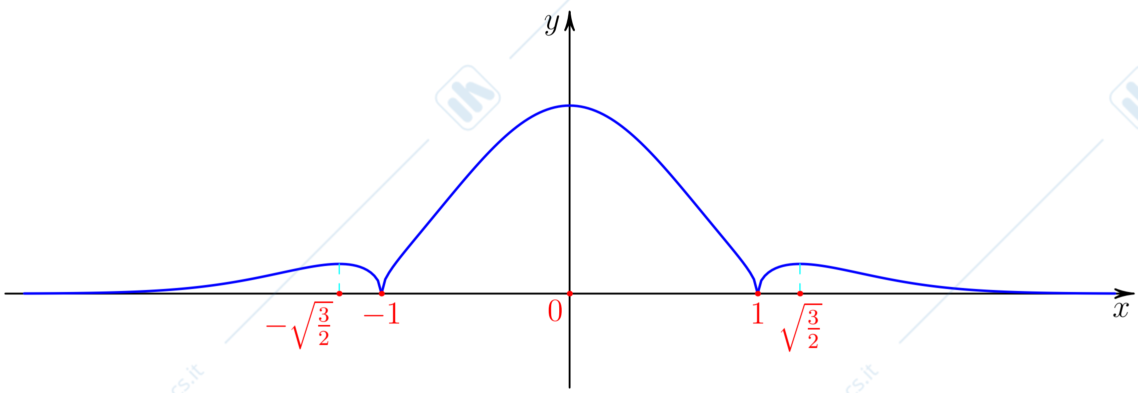
La funzione non è derivabile in $x = \pm 1$, punti di cuspide. Infatti

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} f'(x) = +\infty.$$

$f'(x) > 0$ sse $x \in \Big(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\Big) \cup (-1,0) \cup \Big(1, \sqrt{\frac{3}{2}}\Big)$, ove f risulta strettamente crescente;

$f'(x) < 0$ sse $x \in \Big(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -1\Big) \cup (0,1) \cup \Big(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\Big)$, ove f risulta strettamente decrescente;

$f'(x) = 0$ sse $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ e $x = 0$; $f(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}) = \mathrm{e}^{-3/2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ e $f(0) = 1$, quindi $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ sono punti di massimo relativo e $x = 0$ è punto di massimo assoluto, $f(0) = 1$.



2. (6 punti)

(a) Calcolare gl'integrali

$$\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2+2t+2}\,, \qquad \int_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{t \arcsin t^2}{\sqrt{1-t^4}}\, dt.$$

(b) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x t \arcsin t^2\, dt\,.$$

Soluzione. (a) Per il primo integrale abbiamo:

$$\int \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \arctan(t+1)+c,$$

da cui

$$\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2+2t+2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Nel secondo integrale, con la sostituzione $t^2 = y$ otteniamo

$$\int \frac{t \arcsin t^2}{\sqrt{1-t^4}}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{1}{4}(\arcsin y)^2 + c = \frac{1}{4}(\arcsin t^2)^2 + c.$$

L'integrale richiesto è

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{t \arcsin t^2}{\sqrt{1-t^4}}\, dt = \frac{1}{4}\Big(\arcsin\frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4}(\arcsin 0)^2 = \frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^2.$$

(b) Utilizzando il Teorema Fondamentale del Calcolo e il Teorema di De l'Hôpital si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x t \arcsin t^2\, dt \;=\; \lim_{x\to 0^+} \frac{x \arcsin x^2}{1} = 0.$$

3. (5 punti) Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Discutere la diagonalizzabilità di A al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare autovalori e autovettori di A nel caso $\alpha = 1$.

Soluzione. Calcoliamo gli autovalori della matrice, come radici del polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 1-\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\big(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \alpha^2\big) = 0$$

sse

$$\lambda = 2, 1+|\alpha|, 1-|\alpha|.$$

Se $\alpha = 0, \pm 1$, tutti gli autovalori sono semplici, quindi regolari, ed A risulta diagonalizzabile.
Se $\alpha = 0$, l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2. Osserviamo che in questo caso la matrice A è diagonale quindi diagonalizzabile.
Se $\alpha = 1$, l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica 2. Per determinare se è regolare determiniamo la sua molteplicità geometrica $d_2 = 3 - \text{rango}(A-2I)$. Essendo

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

il rango è 2 (il determinante della sottomatrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è diverso da zero). L'autovalore $\lambda = 2$ non è regolare, quindi la matrice A non è diagonalizzabile.
Se $\alpha = -1$, l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica 2. Per determinare se è regolare determiniamo la sua molteplicità geometrica $d_2 = 3 - \text{rango}(A - 2I)$. Essendo

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

il rango è 2 (il determinante della sottomatrice $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ è diverso da zero). L'autovalore $\lambda = 2$ non è regolare, quindi la matrice A non è diagonalizzabile.

Sia $\alpha = 1$. Cerchiamo gli autovettori relativi a $\lambda = 0$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ x + 2z = 0. \end{cases},$$

le cui soluzioni $(x, y, z) = (-2t, 2t, t) = t(-2, 2, 1)$, per $t \neq 0$, sono gli autovettori cercati .

Per l'autovalore $\lambda = 2$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ x = 0. \end{cases},$$

le cui soluzioni $(x, y, z) = (0, 0, t) = t(0, 0, 1)$, per $t \neq 0$, sono gli autovettori cercati (come si poteva dedurre subito osservando la matrice A).

4. (5 punti) Dati i punti $A = (1, -1, 0)$, $B = (2, 2, 1)$, $C = (3, 1, -2)$, $D = (1, 0, 0)$ determinare:

   (a) il piano π passante per A, B, C;

   (b) il piano π_1 passante per D e parallelo a π;

   (c) il piano π_2 passante per $O = (0, 0, 0)$ e D e ortogonale a π.

Soluzione. (a) Il piano π in forma parametrica è il luogo dei punto $P = (x, y, z)$ tali che:

$$P = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = 1 + t + 2s \\ y = -1 + 3t + 2s \\ z = t - 2s. \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

In forma cartesiana:

$$2x - y + z = 3.$$

(b) Possiamo prendere per π_1 la stessa normale di π: $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$, quindi in forma cartesiana π_1 ha equazione:

$$2x - y + z = d,$$

per qualche $d \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per il punto D otteniamo $d = 2$, da cui l'equazione del piano π_1

$$2x - y + z = 2.$$

(c) Per ottenere il piano π_2 di equazione $ax + by + cz = d$, imponiamo il passaggio per O e per D, da cui segue subito $d = 0$ e $a = 0$. Imponendo l'ortogonalità delle normali ai piani π e π_2 otteniamo

$$0 = \mathbf{n_2} \cdot \mathbf{n} = (0, b, c) \cdot (2, -1, 1) = -b + c \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

Possiamo scegliere come normale $\mathbf{n_2} = (0, 1, 1)$, il piano π_2 ha quindi equazione

$$y + z = 0.$$

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE) - 4 febbraio 2016

1. Scrivere il numero complesso $z = 1 - i$ in forma trigonometrica e in forma esponenziale.

2. Stabilire se i tre vettori $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, -2, 3)$, $w = (0, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti.

3. Calcolare l'angolo formato dai due vettori $u = (1, 1)$ e $v = (-2, 0)$.

4. Scrivere le equazioni parametriche della retta passante per i due punti $A(0, 0, 1)$ e $B(1, 1, 0)$.

5. Calcolare l'area del triangolo di vertici $A(1, 5, 2)$, $B(2, 1, 1)$, $C(0, 1, 0)$.

6. Determinare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ -2 & 2 & -1 & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$.

7. Stabilire se è invertibile la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Risolvere il sistema $x + 2y = 7$, $x - 5y = 7$.

9. Determinare il nucleo dell'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $L(x, y, z) = (x, y)$.

10. Ove possibile, calcolare i prodotti matriciali AB e BA dove
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE) - 4 febbraio 2016

Teoria. (3 punti) Enunciare il Teorema di Rouché-Capelli per i sistemi lineari e spiegare come si deve procedere nel caso in cui il sistema ammetta soluzioni.

Soluzione. Confrontare il libro di testo.

1. (6 punti) Risolvere in **C** le equazioni

$$(a)\ z^2+\sqrt{2}(1-\mathrm{i})z-2\mathrm{i}=0 \qquad (b)\ \frac{1}{z^2}+\sqrt{2}(1-\mathrm{i})\frac{1}{z}-2\mathrm{i}=0 \qquad (c)\ z^8+\sqrt{2}(1-\mathrm{i})z^4-2\mathrm{i}=0\ .$$

Soluzione. (a) Le due radici complessi richieste sono:

$$z_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}(1-i)\pm\sqrt{2(1-i)^2+8i}}{2}=\frac{-\sqrt{2}(1-i)\pm\sqrt{4i}}{2}=\frac{-\sqrt{2}(1-i)\pm 2\sqrt{i}}{2}.$$

Essendo le due radici complesse di $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$,

$$w_1=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad w_2=e^{i\frac{5\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

otteniamo le due soluzioni richieste:

$$z_1=\frac{-\sqrt{2}(1-i)+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=i\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad z_2=\frac{-\sqrt{2}(1-i)-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}.$$

(b) Utilizzando il cambiamento di variabile $\xi=1/z$, dal punto precedente otteniamo:

$$\xi_1=i\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad \xi_2=-\sqrt{2}.$$

Le due soluzioni cercate sono quindi

$$z_1=\frac{-i}{\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(c) Sfruttando ancora le soluzioni del punto (a), operando il cambiamento di variabile $\xi=z^4$, abbiamo $\xi_1=i\sqrt{2}$ e $\xi_2=-\sqrt{2}$. Calcolando le radici complesse quarte di $\xi_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ e $\xi_2=\sqrt{2}e^{i\pi}$, otteniamo le otto soluzioni:

$$z_k=\sqrt[8]{2}e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4})}, \qquad \text{k=0,1,2,3} \qquad \text{e} \qquad w_k=\sqrt[8]{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})}, \qquad \text{k=0,1,2,3}.$$

2. (6 punti) Determinare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ definita da $L(x,y,z)=(x+y,x+z,2x+2y,x+y+z)$. L'applicazione L è iniettiva? L'applicazione L è suriettiva?

Soluzione. Associamo ad L la matrice rappresentativa rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\2&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

l'immagine di L è generata dalle colonne di A. Calcoliamo il rango di A: essendo

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0,$$

il rango è 3. L'immagine di L è

$$\mathrm{Im}L = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ al variare di } t, s, \sigma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dal teorema di nullità più rango si deduce che il nucleo di L è ridotto al solo vettore nullo. L'applicazione è quindi iniettiva. Sempre dal teorema di nullità più rango otteniamo che L non può essere suriettiva, essendo la dimensione dello spazio di arrivo $\mathbb{R}^4$ strettamente maggiore di quella dello spazio di partenza $\mathbb{R}^3$.

3. (6 punti) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile.

Soluzione. Calcoliamo gli autovalori della matrice, come radici del polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & \alpha - \lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\big(\lambda^2 - (\alpha+3)\lambda + 3\alpha\big) = 0$$

sse

$$\lambda = 1, 3, \alpha.$$

Se $\alpha \neq 1, 3$, tutti gli autovalori sono semplici, quindi regolari, ed A risulta diagonalizzabile.
Se $\alpha = 1$, l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2. Per determinare se è regolare determiniamo la sua molteplicità geometrica $d_1 = 3 - \text{rango}(A - I)$. Essendo

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

il rango è 2 (il determinante della sottomatrice $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ è diverso da zero). L'autovalore $\lambda = 1$ non è regolare, quindi la matrice A non è diagonalizzabile.
Se $\alpha = 3$, l'autovalore $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 2. Per determinare se è regolare determiniamo la sua molteplicità geometrica $d_3 = 3 - \text{rango}(A - 3I)$. Essendo

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

il rango è 2 (il determinante della sottomatrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ è diverso da zero). L'autovalore $\lambda = 3$ non è regolare, quindi la matrice A non è diagonalizzabile.

4. (6 punti) Sia r la retta di equazione cartesiana $x + y + z = x + y + 2z + 1 = 0$. Per ciascuna delle due rette in forma parametrica

$$r_1 \quad : \quad \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 \quad : \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

stabilire se r le interseca e, in caso contrario, determinarne la posizione reciproca.

Soluzione. Scriviamo la retta r in forma parametrica:

$$r \; : \; \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases} \quad \text{sse} \quad \begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{sse} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

al variare di $s \in \mathbb{R}$.
Per determinare se r e r_1 si intersecano, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} s = 4 + t \\ 1 - s = -3 - t \\ -1 = 1 + t \end{cases} \qquad \text{sse} \qquad \begin{cases} s - t = 4 \\ s - t = 4 \\ t = -2 \end{cases}$$

Il sistema ammette un'unica soluzione $(t, s) = (-2, 2)$, le rette si intersecano in un unico punto $P = (2, -1, -1)$.
Per determinare se r e r_2 si intersecano, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} s = t \\ 1 - s = t \\ -1 = t \end{cases}$$

Il sistema non ammette soluzioni, le due rette non si intersecano. I vettori $(1, -1, 0)$ e $(1, 1, 1)$ non sono paralleli, le rette r e r_2 sono sghembe.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE) - 16 settembre 2016

1. Risolvere in $\mathbb{C}$: $3z^2 - 5iz + 2 = 0$.

2. Calcolare il determinante della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt[3]{\pi} & 3 \\ \sqrt{\pi} & 1 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Determinare il nucleo dell'applicazione lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\Phi(x, y) = (x + 3y, 2x + 6y)$.

4. Determinare l'immagine dell'applicazione lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\Phi(x, y) = (x + 3y, 2x + 6y)$.

5. Determinare la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x \sinh(x^9) + \sin(x^2)$ nell'origine.

6. Posto $f(x) = x + 1 - \cos(x^3)$, calcolare $f^{(5)}(0)$ (derivata quinta in 0).

7. Posto $u = (-1, 2, 0)$, $v = (1 - 2, 0)$, $w = (0, 0, 1)$, calcolare $u \cdot v \wedge w$.

8. Calcolare l'angolo compreso tra i due vettori $u = (1, 1)$ e $v = (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1)$.

9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1 + 2x^3}\, dx$.

10. Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi x \sin x \, dx$.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE) - 16 settembre 2016

Teoria. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri.

Soluzione. Confrontare il libro di testo.

1. (9 punti) Si studi la funzione

$$f(x) = \log\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$$

precisandone in particolare: dominio di definizione, segno e zeri, limiti agli estremi del dominio di definizione, eventuali asintoti, derivata, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo relativo o assoluto, limiti della derivata, eventuali punti di non derivabilità, derivata seconda, concavità, convessità, eventuali punti di flesso. Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per

$$\begin{cases} x - \sqrt{x^2-1} > 0 \\ x^2 \geq 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geq 1.$$

$f(x) = 0$ sse $x = 1$, $f(x) > 0$ sse $x - \sqrt{x^2-1} > 1$, mai. Quindi $f(x) < 0$ per ogni $x \neq 1$ e $x = 1$ risulta punto di massimo assoluto per f.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = -\infty.$$

La funzione non ha asintoto obliquo, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x} = 0.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

La funzione non è derivabile da destra in $x = 1$ e

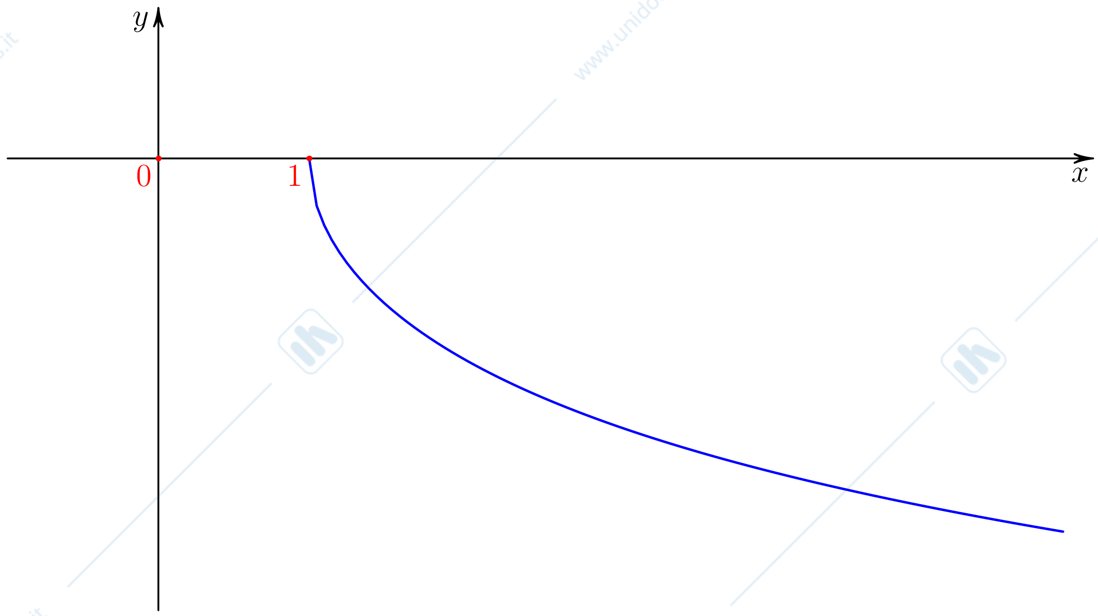
$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = -\infty.$$

$f'(x) < 0$ per ogni $x > 1$, quindi f risulta strettamente decrescente.

La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{x}{(x^2-1)^{3/2}},$$

$f''(x) > 0$ per ogni $x > 1$, quindi f risulta convessa.



2. (4 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos(x^2) - x^2}{x^2 \ln(1+2x^2)}.$$

Soluzione. Utilizzando gli sviluppi di Taylor in 0 delle funzioni esponenziale e coseno otteniamo

$$\frac{e^{x^2} - \cos(x^2) - x^2}{x^2 \ln(1+2x^2)} = \frac{1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4) - 1 + x^4/2 + o(x^4) - x^2}{x^2 \ln(1+2x^2)} \sim \frac{x^4}{2x^4} \to \frac{1}{2} \qquad \text{per } x \to 0.$$

3. (4 punti)

(a) Risolvere l'equazione nel campo complesso

$$z^3 = \mathrm{i} z \overline{z}$$

(b) Disegnare nel piano di Argand-Gauss l'insieme A delle soluzioni trovate nel punto precedente.

(c) Disegnare nel piano di Argand-Gauss l'insieme $B = \{w = \mathrm{i}z \;:\; z \in A\}$.

Soluzione. (a) In forma esponenziale $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$, si ottiene

$$\rho^3 e^{\mathrm{i}3\theta} = \rho^2 e^{\mathrm{i}\pi/2}$$

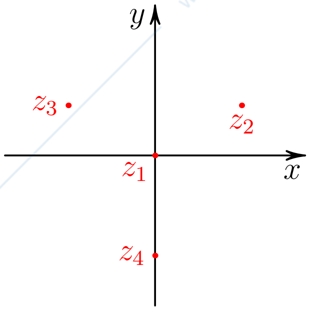
valido sse

$$\rho = 0, 1 \qquad \text{e} \qquad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \qquad \text{con } k = 0, 1, 2.$$

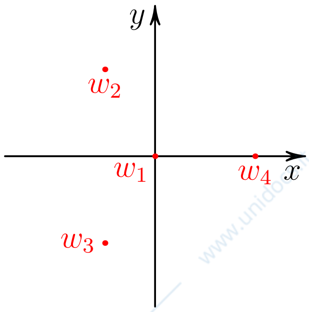
Si ottengono le soluzioni

$$z_1 = 0, \quad z_2 = e^{\mathrm{i}\pi/6}, \quad z_3 = e^{\mathrm{i}5\pi/6}, \quad z_4 = e^{\mathrm{i}3\pi/2}.$$

(b) Nel piano di Argand-Gauss



(c) L'insieme B si ottiene ruotando di $\pi/2$ l'insieme A:



4. (7 punti) Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile.

(b) Stabilire se esistono dei valori di k in corrispondenza dei quali $v = (1, -1, 0)$ è autovettore di A.

(c) Stabilire se esistono dei valori di k in corrispondenza dei quali A è simile alla matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Soluzione. (a) Calcoliamo gli autovalori della matrice, come radici del polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} k-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & k \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(k-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

sse

$$\lambda = 2, k, 3.$$

Se $k \neq 2, 3$, tutti gli autovalori sono semplici, quindi regolari, ed A risulta diagonalizzabile.
Se $k = 2$, l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica 2. Per determinare se è regolare calcoliamo la sua molteplicità geometrica $d_2 = 3 - \text{rango}(A - 2I)$. Essendo

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

il rango è 1 quindi l'autovalore $\lambda = 2$ è regolare, e la matrice A diagonalizzabile.
Se $k = 3$, l'autovalore $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 2. Per determinare se è regolare determiniamo la sua molteplicità geometrica $d_3 = 3 - \text{rango}(A - 3I)$. Essendo

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

il rango è 2 (il determinante della sottomatrice $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ è diverso da zero). L'autovalore $\lambda = 3$ non è regolare, quindi la matrice A non è diagonalizzabile.
(b) Determiniamo se esistono $k, \lambda \in \mathbb{R}$ tali che $Av = \lambda v$, i.e.

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{sse} \qquad \begin{cases} k = \lambda \\ -1 = -\lambda \\ 0 = 0. \end{cases}$$

sse $k = \lambda = 1$.
(c) Essendo una matrice triangolare gli autovalori di B sono gli elementi della diagonale: $\lambda = 1, 2, 3$. Gli autovalori sono semplici, quindi regolari, e B risulta diagonalizzabile e simile alla matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Per $k = 1$, A è diagonalizzabile e simile alla stessa matrice D. Quindi A e B sono simili per $k = 1$.