TEMA A 2° APPELLO 12|02|2024

ESERCIZIO 1

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(2+\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\sin x}{\cosh\left(e^{x^\alpha}-1\right)-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{e^{-1/x}+1}} \qquad \alpha>0$$

NUMERATORE

OSS $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2\alpha}} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$$\ln\left(2+\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\left(2x^{2\alpha}+1\right)\right)$$

$$= \ln\frac{1}{x^{2\alpha}} + \ln\left(1+2x^{2\alpha}\right) = 2\alpha\ln\frac{1}{x} + 2x^{2\alpha} - \frac{1}{2}\left(2x^{2\alpha}\right)^2 + o\left(x^{4\alpha}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}(x+1)\right) = \ln\frac{1}{x} + \ln(1+x)$$

$$= \ln\frac{1}{x} + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x\to 0^+$$

$\sin x = x + o(x^2)$ per $x\to 0^+$ OSS $x^\beta = o(\ln 1/x)$ $\forall \beta>0$

infatti $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\beta}{\ln 1/x} = 0 \quad \forall\beta>0$

$$\ln\left(2+\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin x =$$

$$= (2\alpha-1)\ln\frac{1}{x} + 2x^{2\alpha} - 2x^{4\alpha} + o(x^{4\alpha}) - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$- x + o(x^2) = \begin{cases} (2\alpha-1)\ln 1/x + o(1) & \alpha>0,\ \alpha\neq 1/2 \\ -2x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) & \alpha = 1/2 \end{cases}$$

per $x\to 0^+$

DENOMINATORE per $x \to 0^+$

$$\cosh\left(e^{x^\alpha}-1\right) = 1 + \frac{\left(e^{x^\alpha}-1\right)^2}{2} + o\left(\left(e^{x^\alpha}-1\right)^3\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(x^\alpha + \frac{x^{2\alpha}}{2} + o\left(x^{2\alpha}\right)\right)^2 + o\left(\left(x^\alpha + \frac{x^{2\alpha}}{2} + o\left(x^{2\alpha}\right)\right)^3\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^{2\alpha} + \frac{1}{2}x^{3\alpha} + o\left(x^{3\alpha}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$$

$$\sqrt{e^{-1/x}+1} = 1 + \frac{e^{-1/x}}{2} + o\left(e^{-1/x}\right)$$

OSS $\quad \dfrac{e^{-1/x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \quad \forall \beta > 0$

$$\cosh\left(e^{x^\alpha}-1\right) - \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{e^{-1/x}+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^{2\alpha} + o\left(x^{2\alpha}\right) & 0<\alpha<1 \\ \frac{1}{2}x^3 + o\left(x^3\right) & \alpha = 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right) & \alpha > 1 \end{cases}$$

LIMITE

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(2+\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin x}{\cosh\left(e^{x^\alpha}-1\right) - \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{e^{-1/x}+1}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-(1-2\alpha)\ln 1/x + o(1)}{1/2\, x^{2\alpha} + o\left(x^{2\alpha}\right)} = -\infty & 0<\alpha<1/2 \text{ i.e. } (1-2\alpha)>0 \\ \dfrac{-\frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right)}{1/2\, x + o\left(x^{1/2}\right)} = 0 & \alpha = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{+(2\alpha-1)\ln 1/x + o(1)}{\frac{1}{2}x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha})} = +\infty & \frac{1}{2} < \alpha < 1 \\ \dfrac{(2-1)\ln 1/x + o(1)}{\frac{1}{2}x^{3} + o(x^{3})} = +\infty & \alpha = 1 \\ \dfrac{(2\alpha-1)\ln 1/x + o(1)}{-\frac{1}{2}x^{2} + o(x^{2})} = -\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n-1} \left(\frac{\alpha-2}{2}\right)^n$$

1) $\alpha = 3$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

serie a termini generali di segno costante positivo uso il criterio del rapporto

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{\ln(n)} 2^n =$$

$$= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

converge semplicemente per il criterio del rapporto

(In questo caso $|a_n| = a_n$
convergenza assoluta = semplice

(II) Per la convergenza assoluta usiamo il criterio del rapporto per $\alpha \neq 2$ (se $\alpha = 2$ $\sum_{n=2}^{+\infty} 0^n = 0$ converge ass e semp)

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \left|\frac{\alpha-2}{2}\right|^{n+1} \cdot \frac{n-1}{\ln n} \left|\frac{2}{\alpha-2}\right|^{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left|\frac{\alpha-2}{2}\right|$$

se $\left|\frac{\alpha-2}{2}\right| < 1$, $\alpha \neq 2$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente

$\Rightarrow$ convergenza assoluta e semplice per $0 < \alpha < 4$

se $\left|\frac{\alpha-2}{2}\right| > 1$ la serie diverge assolutamente e il termine generale non è infinitesimo

infatti $a_n = \frac{\ln n}{n-1} \left(\frac{\alpha-2}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ se $\alpha > 4$ La serie diverge

$a_n = \frac{\ln n}{n-1} \left(\frac{\alpha-2}{2}\right)^n$ non ammette limite per $n \to +\infty$ (a_n non è limitato e oscilla tra valori positivi grandi e negativi grandi se $\alpha < 0$

La serie non converge.

per $\alpha = 0$ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n-1} (-1)^n$ converge per Leibniz

infatti $\frac{\ln n}{n-1} \to 0$ e $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ è decrescente per $x > 2$

come si può verificare

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1 - 1/x - \ln x}{(x-1)^2} < 0 \text{ per } x \text{ grandi}$$

per $\alpha = 4$ $\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n-1}$ diverge infatti

per il confronto $\frac{\ln n}{n-1} > \frac{1}{n-1}$ e la serie $\sum \frac{1}{n-1}$ diverge

ESERCIZIO 3

$$f(x) = x - 2 + \frac{2-x}{e^{-1/|x-2|}}$$

i) DOMINIO $\quad x-2 \neq 0 \quad \Rightarrow \mathbb{R}\setminus\{2\}$

il dominio non è simmetrico la funzione non è pari nè dispari Vediamo ora $\forall x \neq 2$ quando

$$f(x) = (x-2)\left(1 - e^{\frac{1}{|x-2|}}\right) \geq 0$$

$x-2 \geq 0, x \neq 2 \Rightarrow x > 2$

$1 - e^{\frac{1}{|x-2|}} \cancel{\geq} 0, x \neq 2 \Rightarrow \emptyset$ $\quad$ infatti $e^{\frac{1}{|x-2|}} > 1 \quad \forall x \neq 2$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2 & & & \\ - & - & - & 0 & + & + & + \\ - & & - & 0 & & - & - \\ & + & & & & - & \end{array}$$

$f(x) > 0 \quad -\infty < x < 2$

$f(x) < 0 \quad x > 2$

La funzione è continua come composizione di funzioni continue

(II) $\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \lim_{x\to 2^\pm} -(x-2)\, e^{\frac{1}{|x-2|}} + o(1)$

$= \mp\infty$

$x=2$ asintoto verticale. Non si può estendere la funzione a $x=2$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x-2)\left(\cancel{1} - \cancel{1} - \frac{1}{|x-2|} + o\left(\frac{1}{|x-2|}\right)\right)$

$= \mp 1$ $\quad$ $y=1$, $y=-1$ asintoti orizzontali

(III) f è derivabile $\forall x \neq 2$

$f'(x) = \left(1 - e^{1/|x-2|}\right) + (x-2)\left(+\frac{x-2}{|x-2|} \cdot \frac{1}{(x-2)^2}\, e^{1/|x-2|}\right)$

$= 1 - e^{1/|x-2|} + \frac{1}{|x-2|}\, e^{1/|x-2|}$ $\quad$ continua $\forall x \neq 2$

Abbiamo inoltre che $\forall x \neq 2$

$f''(x) = +\frac{x-2}{|x-2|} \cdot \frac{1}{|x-2|^2} \cdot e^{1/|x-2|} - e^{1/|x-2|} \cdot \frac{(x-2)}{|x-2|^3}$

$- \frac{1}{|x-2|} \cdot \frac{(x-2)}{|x-2|^3}\, e^{1/|x-2|}$

$$= -\frac{(x-2)}{|x-2|^4} \cdot e^{1/|x-2|}$$

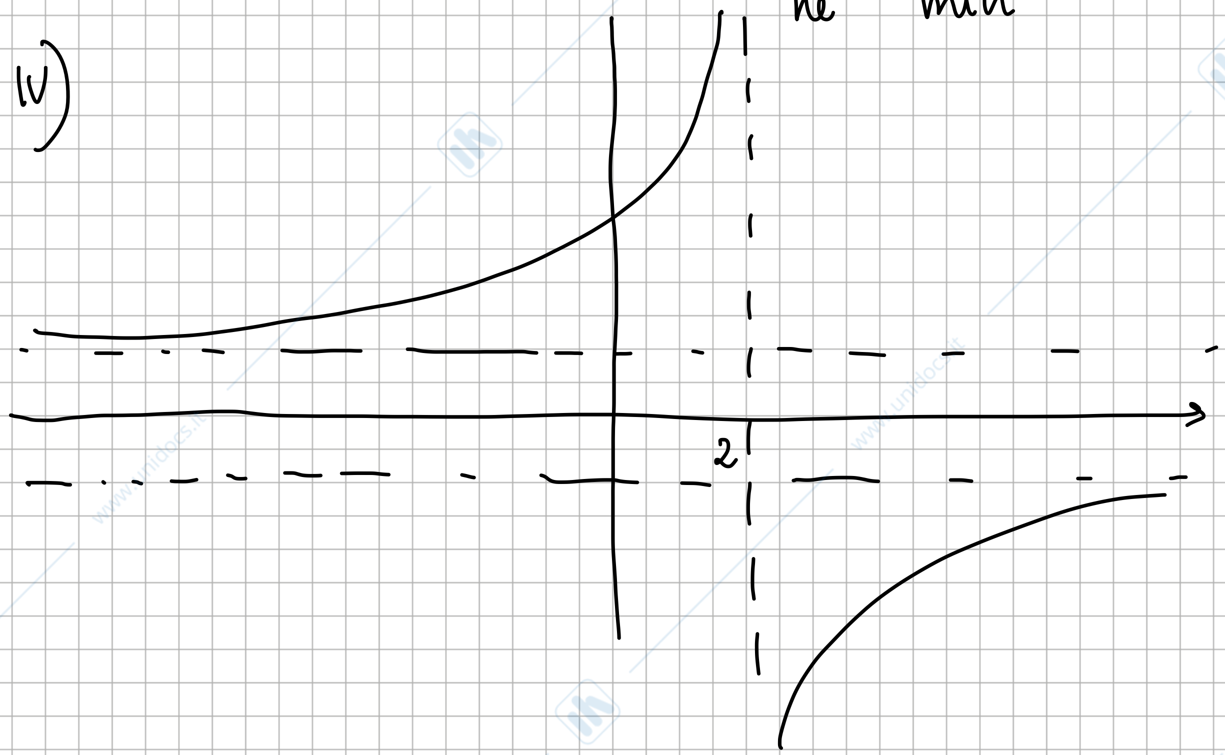
Abbiamo quindi

		2	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

e dato che $\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0$ avremo

$f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 2$ non ci sono max né min

IV)



ESERCIZIO 4

$$F(x) = \int_x^2 \frac{\arctan(t-2)}{(t-2)(t+3)}\,dt =$$

$$= -\int_2^x \frac{\arctan(t-2)}{(t-2)(t+3)}\,dt$$

(1) La funzione integranda

$f(t) = \dfrac{\arctan(t-2)}{(t-2)(t+3)}$ è definita $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$

e può essere estesa con continuità in 2 a

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & t \in \mathbb{R}\setminus\{-3,2\} \\ 1/5 & t = 2 \end{cases}$$

dato che $\lim_{t\to 2^\pm} f(t) = \lim_{t\to 2^\pm} \dfrac{(t-2)+o(t-2)}{(t-2)(t+3)} = 1/5$

$\tilde{f}(t)$ è integrabile per ogni intervallo della forma $[2, x]$ con $x \in]-3, +\infty[$

Quindi F è ben definita su $]-3, +\infty[$

in $x = -3$ $\quad \dfrac{\arctan(x-2)}{(x-2)(x+3)} \underset{-3}{\sim} \dfrac{\arctan 1}{(x+3)}$

il cui integrale diverge su $[-3, 2]$.

Il dominio di $F(x) = -\int_2^x \tilde{f}(t)\,dt$

è $D =]-3, +\infty[$

La funzione non è simmetrica dato che il suo dominio non lo è.

Ora $\tilde{f}(t) > 0 \quad \forall \quad t > -3$

quindi $F(x) < 0$ per $x > 2$

e $F(x) > 0$ per $-3 < x < 2$

$F(2) = 0$

(II) Per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo $\forall x \in D$

$F'(x) = -\tilde{f}(x) < 0 \Rightarrow F$ è strettamente decrescente. Non ci sono max né min

III) Abbiamo già visto che $\int_{-3}^{2} \tilde{f}(t)\,dt$ diverge quindi $\lim_{x \to -3} F(x) = +\infty$

e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\int_2^{+\infty} \tilde{f}(t)\,dt$

ora $\tilde{f}(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{t^2}$ il cui integrale converge (i.e. Asintoto orizz.)

$\Rightarrow$ F è superiormente illimitata e inferiormente limitata

ESERCIZIO 5

$$\int_0^2 \frac{\ln x}{(2-x)^{2\alpha}}\, dx$$

1) $x \mapsto \frac{\ln x}{(2-x)^{2\alpha}}$ è ben def su $]0,2[$ ed è integrabile su $[a,b]$ con $0<a<b<2$

positiva su $[1,2[$

negativa su $]0,1[$

abbiamo $\frac{|\ln x|}{(2-x)^{2\alpha}} \underset{0}{\sim} \frac{|\ln x|}{2^{2\alpha}}$ che è integrabile in 0 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

infatti $\lim_{x\to 0^+} \frac{|\ln x|}{1/\sqrt{x}} = 0$ quindi $|\ln x| = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx < +\infty$

Inoltre $\frac{\ln x}{(2-x)^{2\alpha}} \underset{2}{\sim} \frac{\ln 2}{(2-x)^{2\alpha}}$ integrabile in 2 sse $2\alpha < 1$

Quindi l'integrale converge sse $\alpha < 1/2$

(ii) $\int_0^2 (2-x)\ln x \, dx = \lim_{a\to 0} \int_a^2 (2-x)\ln x \, dx = (*)$

$2\int \ln x \, dx - \int x\ln x \, dx \underset{IPP}{=} 2\left[x\ln x - \int 1 \, dx\right] - \int x \ln x \, dx$

$= 2[x\ln x - x] - \int x\ln x \, dx \underset{IPP}{=} 2[x\ln x - x] - \frac{1}{2}x^2\ln x$

$+ \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = 2[x\ln x - x] - \frac{1}{2}\left[x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2\right] + c$

$(*) = \lim_{a\to 0} 2[x\ln x - x]_a^2 - \frac{1}{2}\left[x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2\right]_a^2$

$= 4\ln 2 - 4 - \frac{1}{2}4\ln 2 + \frac{1}{4}4$

$= 2\ln 2 - 3$

ESERCIZIO 6

$y''(t) + y'(t) - 6y(t) = -2$

(1) $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0$ ELO

Il polinomio caratteristico ha 2 radici distinte

$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2) = 0$

$y_0(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

integrale generale di ELO

(II) $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = -2$

Una soluzione particolare di ELNO

è $y_p(t) = \frac{1}{3} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

L'integrale generale di ELNO è dato da

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{3} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(III) Tutte e sole le soluzioni con asintoto orizzontale per $t \to +\infty$

sono quelle per cui $c_2 = 0$ e $c_1 \in \mathbb{R}$

infatti

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } c_2 = 0 \\ +\infty & \text{se } c_2 > 0 \\ -\infty & \text{se } c_2 < 0 \end{cases}$$