TEO TAYLOR CON RESTO SECONDO PEANO

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ n-volte derivabile in $x_0\in(a,b)$

Definiamo il Polinomio di Taylor di ordine n in x_0 relativo a f: $T^f_{n,x_0}(x):=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k =$

$$\left[= f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{6}\cdot(x-x_0)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right.$$

Allora $\exists R^f_{n,x_0}:(a,b)\to\mathbb{R}$ funzione resto /

$$f(x)=T^f_{n,x_0}(x)+R^f_{n,x_0}\quad\forall x\in(a,b)$$

R^f_{n,x_0} è infinitesimo di ordine $>n$ per $x\to x_0$, cioè

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0 \Rightarrow R^f_{n,x_0}(x)=o\left((x-x_0)^n\right)\ \text{per } x\to x_0$$

Dim: Definendo $R^f_{n,x_0}:=f-T^f_{n,x_0}$

Occorre dimostrare che:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T^f_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}$$

applichiamo de l'Hopital $(n-1)$ volte.

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot k(x-x_0)^{k-1}}{n\cdot(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot k(k-1)(x-x_0)^{k-2}}{n \cdot (n-1) \cdot (x-x_0)^{n-2}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - \left[f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0) \right]}{\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2}_{n!} \cdot (x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - \frac{f^{(n)}(x_0)\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{(x-x_0)}} \right] =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) \right] =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \left\{ \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) \right\} = 0.$$