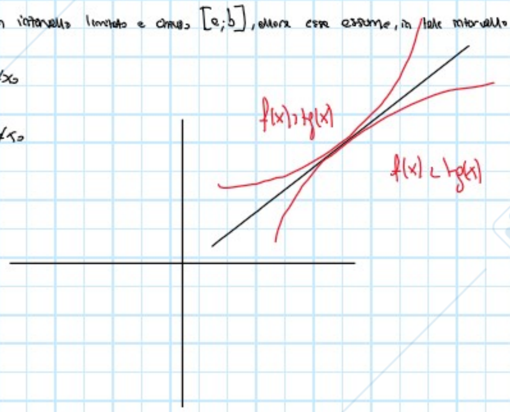
Massimi, minimi e flessi

mercoledì 26 dicembre 2018 15:18

Teorema di Weierstrass: se una funzione è continua in un intervallo limitato e chiuso $[a;b]$, allora essa assume, in tale intervallo il max. assoluto e il min. assoluto

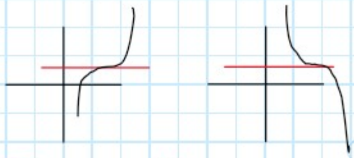
Concavità
- verso l'alto = Se $f(x) > tg(x)$ $\forall x \in I \wedge x \neq x_0$
- verso il basso = Se $f(x) < tg(x)$ $\forall x \in I \wedge x \neq x_0$



Flessi
- orizzontali
- verticali
- obliquo

Data $f(x)$ definita e continua in $[a;b]$ presenta un punto di flesso se in tale punto cambia la concavità

Flesso ascendente oppure discendente



Teorema di Fermat

Se $f(x)$ ha massimo o minimo in un punto, allora in quel punto la derivata si annulla $\rightarrow f'(x_0)=0$

Data $f(x)$

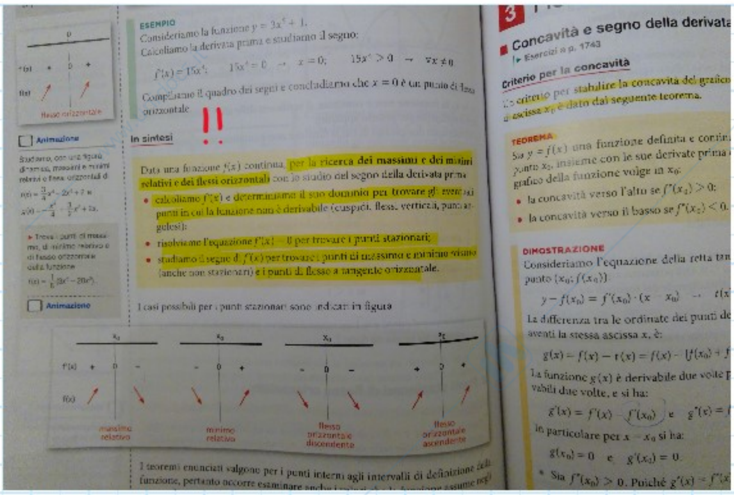
a) Se $f'(x) > 0$ allora x_0 è punto di massimo

b) Se $f'(x) < 0$ allora x_0 è punto di minimo

Punti stazionari di flesso orizzontale

x_0 è punto di flesso orizzontale se 1) $f'(x_0)=0$

2) segno di $f'(x)$ è lo stesso per ogni $x \neq x_0$



ESEMPIO

Consideriamo la funzione $y = 3x^5 + 1$.
Calcoliamo la derivata prima e studiamo il segno:

$f'(x) = 15x^4$; $15x^4 = 0 \rightarrow x = 0$; $15x^4 > 0 \rightarrow \forall x \neq 0$

Compiliamo il quadro dei segni e concludiamo che $x = 0$ è un punto di flesso orizzontale.

!!

In sintesi

Data una funzione $f(x)$ continua, per la ricerca dei massimi e dei minimi relativi e dei flessi orizzontali con lo studio del segno della derivata prima

- calcoliamo $f'(x)$ e determiniamo il suo dominio per trovare gli eventuali punti in cui la funzione non è derivabile (cuspidi, flessi verticali, punti angolosi);
- risolviamo l'equazione $f'(x) = 0$ per trovare i punti stazionari;
- studiamo il segno di $f'(x)$ per trovare i punti di massimo e minimo relativo (anche non stazionari) e i punti di flesso a tangente orizzontale.

I casi possibili per i punti stazionari sono indicati in figura

I teoremi enunciati valgono per i punti interni agli intervalli di definizione della funzione, pertanto occorre esaminare anche ...

3 Concavità e segno della derivata

Esercizi a p. 1743

Criterio per la concavità

Un criterio per stabilire la concavità del grafico ... di ascissa x_0 è dato dal seguente teorema.

TEOREMA

Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua ... punto x_0, insieme con le sue derivate prima ... grafico della funzione volge in x_0:

- la concavità verso l'alto se $f''(x_0) > 0$;
- la concavità verso il basso se $f''(x_0) < 0$.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo l'equazione della retta tangente ... punto $(x_0; f(x_0))$:

$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \rightarrow t(x) ...$

La differenza tra le ordinate dei punti de... aventi la stessa ascissa x, è:

$g(x) = f(x) - t(x) = f(x) - [f(x_0) + f ...$

La funzione $g(x)$ è derivabile due volte p... vabili due volte, e si ha:

$g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ e $g''(x) = ...$

In particolare per $x = x_0$ si ha:

$g(x_0) = 0$ e $g'(x_0) = 0$.

- Sia $f''(x_0) > 0$. Poiché $g''(x) = f''(x) ...$

Criterio per la concavità

- $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ concavità verso l'alto
- $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ concavità verso il basso

Se $f''(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) < 0$ per $x > x_0$ allora x_0 è punto di flesso

Per la ricerca dei flessi

1) calcolo derivata seconda $f''(x)$ e determino il suo dominio
2) studio il segno di $f''(x)$ e cerco i punti di flesso
3) Se x_0 è punto di flesso e:
   - $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ flesso è orizzontale
   - $f'(x_0) \neq 0 \rightarrow$ flesso è obliquo

Per derivate successive

Per determinare i massimi e i minimi relativi e i flessi, con il metodo delle derivate successive, procediamo in questo modo:

- calcoliamo la derivata prima $f'(x)$ e troviamo gli zeri $x_1, x_2, \ldots$ di questa funzione;
- per ogni x_i calcoliamo i valori che assumono le derivate successive; se la prima derivata $f^{(n)}(x)$ che non si annulla in x_i è di ordine pari, allora x_i è un punto di massimo o di minimo relativo, mentre se è di ordine dispari in x_i si ha un flesso orizzontale;
- cerchiamo gli zeri $z_1, z_2, \ldots$ della derivata seconda $f''(x)$;
- per ogni z_i calcoliamo i valori che assumono le derivate successive; se la prima derivata $f^{(n)}(x)$ che non si annulla in z_i è di ordine dispari, allora in z_i si ha un flesso obliquo.