Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica I - INGINF [Prof. V.Pata]
Esame I - 31 Gennaio 2017

0. Esercizi Preliminari

◇ Scrivere *VERO* o *FALSO* accanto a ciascuna affermazione:

- Se $a_n \to 0$ allora la serie di termine generale a_n converge. ....
- Se f è integrabile su $[a,b]$ allora f è continua su $[a,b]$. ....
- Una successione limitata è necessariamente convergente. ....

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica I - INGINF [Prof. V.Pata]
Esame I - 31 Gennaio 2017

0. Esercizi Preliminari

◇ Scrivere *VERO* o *FALSO* accanto a ciascuna affermazione:

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotòna allora è integrabile su $[a, b]$. ....
- Una successione oscillante è necessariamente limitata. ....
- Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora $a_n \to 0$. ....

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica I - INGINF [Prof. V.Pata]
Esame I - 31 Gennaio 2017

I. Teoria

1. Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in(a,b)$. [1 punto ogni domanda]

1.1. Dare la definizione di continuità di f in x_0.

1.2. Dare la definizione di derivabilità di f in x_0.

1.3. Dare la definizione di differenziabilità di f in x_0.

1.4. Mostrare che f è derivabile in x_0 se e solo se è differenziabile in x_0.

1.5. Mostrare che se f è derivabile in x_0 allora è continua in x_0.

1.6. Dare almeno due esempi significativi di f continua ma non derivabile in x_0.

2.1 Dare la definizione di successione a_n convergente a un limite reale ℓ. Rappresentare la definizione graficamente. [2 punti]

2.2 Dare la definizione di successione a_n non infinitesima, cioè esplicitare in corretti termini matematici il fatto che $a_n\not\to 0$. [1 punto]

2.3 Data una successione a_n, si costruisca la successione

$$\sigma_n=\frac{a_1+a_2+\dots a_n}{n}.$$

Dimostrare che se $a_n\to\ell\in\mathbb{R}$, allora si ha che $\sigma_n\to\ell$. [2 punti]

2.4 Mostrare con un controesempio che il viceversa del precedente punto 2.3 è falso: costruire cioè una successione a_n non convergente ma tale che la corrispondente σ_n sia convergente. [1 punto]

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica I - INGINF [Prof. V.Pata]
Esame I - 31 Gennaio 2017

II. Esercizi

1.1. Sia

$$g(x) = \sinh\left[\frac{1}{x} + \log x + \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\right].$$

Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$. [2 punti]

1.2. Sia

$$f(x) = 12\Big[1 + 2x^2 - \cosh x - \frac{3}{2}\sin^2 x\Big].$$

Trovare $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che [2 punti]

$$f(x) = ax^n + o(x^n) \quad \text{in } \mathcal{U}(0).$$

1.3. Calcolare quindi il limite [2 punti]

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)\arctan[g(x)]}{x\big(\mathrm{e}^{11x} - 1\big)\log(1 + \sin^2 x)}$$

2.1. Calcolare l'integrale indefinito [2 punti]

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2.2. Usando l'esercizio precedente, calcolare l'integrale definito [2 punti]

$$\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2.3. Chiamando

$$I_n = \int_0^1 x^{2n+1}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

trovare una formula ricorsiva per I_n (esprimere cioè I_n in funzione degli I_k con $k < n$). [2 punti]

Extra. Sia a_n una successione tale che valga la relazione

$$a_n = \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Possiamo concludere che a_n converge a zero monotonamente?