Funzioni reali in una variabile reale

1. Funzione reale

Una funzione reale in una variabile reale si indica:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Il suo dominio:

$$D(f) = dominio$$

Esempio. $f(x) = \frac{1}{x}$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Si indica l'immagine della funzione come:

$$I(f) = \{y \in \mathbb{R}_{arrivo} \quad t.c. \quad \exists x \in D(f) \;\; con \quad f(x) = y\}$$

Notazione: $A \subset D(f)$

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R}_{arrivo} \quad t.c. \quad y = f(x) \quad con \quad x \in A\}$$

Dato $B \in \mathbb{R}_{arrivo}$, si chiama *controimmagine* di B (attraverso la *f*) l'insieme

$$f^{-1}(B) \;\; [controimmagine] = \{x \in D(f) \;\; t.c. \;\; f(x) \in B\} \subset D(f)$$

N.B.: $f^{-1}(B)$ può essere $\emptyset$.

Esempio.

$$f(x) = x^2 \qquad f^{-1}([-1; 2]) = \emptyset$$

1.1. Funzione iniettiva, suriettiva, biunivoca

Definizione. Data una funzione

$$f: A \to B$$

Si dice che essa è *iniettiva* se:

$$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad t.c. \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

In modo del tutto equivalente:

$$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad t.c. \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

Definizione. Data una funzione

$$f: A \to B$$

Si dice che essa è *suriettiva* se:

$$\forall\, b \in B \;\; \exists\, a \in A \;\; t.c. \;\; f(a) = b$$

Cioè se l'immagine della funzione:

$$I(f) = B$$

Definizione. Data una funzione

$$f: A \to B$$

Si dice che essa è *biunivoca (o biettiva)* se è suriettiva e iniettiva.

In particolare una funzione biunivoca è invertibile:

$$f^{-1}: B \to A$$

1.2. Grafico di una funzione

Definizione. Data una funzione *f* di dominio *D*, si dice *grafico di f* il sottoinsieme

$$G \subset R \times R$$

dato da

$$g = \{(x, y): \quad x \in D(f) \quad \text{e} \quad y = f(x)\}$$

1.3. Segno di una funzione

Data una funzione *f* di dominio *D*, si può scrivere

$$D = D_+ \uplus D_- \uplus D_0$$

con

$$D_0 = \{x \in D \quad t.c. \quad f(x) = 0\}, \quad D_+ = \{x \in D \quad t.c. \quad f(x) > 0\},$$
$$D_- = \{x \in D \quad t.c. \quad f(x) < 0\}$$

2. Funzioni limitate, simmetriche, monotòne e periodiche

2.1. Funzioni limitate

Data una funzione $f: D \to \mathbb{R}$:

Se $\exists M \in \mathbb{R} \;\; t.c. f(x) \leq \text{M}$, per ogni $x \in \text{D} \implies f$ è *superiormente limitata*

Il grafico della f è contenuto nel semipiano inferiore rispetto la retta $y = M$.

Analogamente

Se $\exists m \in \mathbb{R} \;\; t.c. f(x) \geq m$, per ogni $x \in \text{D} \implies f$ è *inferiormente limitata*

Il grafico della f è contenuto nel semipiano superiore rispetto la retta $y = m$.

Una funzione di dice *limitata* se è sia superiormente sia inferiormente limitata.

2.2. Funzioni simmetriche

Una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ è *simmetrica* se

$$x \in D(f) \Leftrightarrow -x \in D(f)$$

ed inoltre:

- f è *pari* se (e solo se) $f(-x) = f(x)$
  Il grafico di *f* è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.
- f è *dispari* se (e solo se) $f(-x) = -f(x) \quad opp. \quad f(x) = -f(-x)$
  Il grafico di *f* è simmetrico rispetto all'origine, quindi alla retta (bisettrice) $y = x$.

2.3. Funzioni monotòne

Una funzione *f* si dice

$$monotòna \begin{cases} crescente \\ strettamente\ crescente \\ decrescente \\ strettamente\ decrescente \end{cases} \text{se} \begin{cases} f(x_1) \geq f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) < f(x_2) \end{cases} \forall x_1, x_2 \in D, \qquad x_1 > x_2$$

2.4. Funzioni periodiche

Sia una funzione $f: D \to \mathbb{R}$, essa è detta *periodica* di periodo T, $T > 0$, se è il più piccolo numero reale tale che:

$$f(x) = f(x+T) \;\; \forall x \in D$$

Ogni intervallo di lunghezza T è detto *intervallo di periodicità.*

3. Operazioni tra funzioni

Date le funzioni

$$f, D(f) \quad \text{e} \quad g, D(g)$$

Vale

$$h = f + g \;\; :\to \quad h(x) = [def.]\, f(x) + g(x)$$

Allo stesso modo valgono le altre operazioni, come $f \cdot g$ e f/g.

Il dominio della funzione h è dato da

$$D(h) = D(f) \cap D(g) \quad (x\; comuni)$$

Esempio. $f(x) = x + \log x$ e $g(x) = -\log x$

$$f + g = x + \log x - \log x \quad \to \;\; D' = (0; +\infty)$$

$$f + x \quad diverso\; da\; f(x) = x \;\; (D = \mathbb{R})$$

$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D_{\pm}(g) \quad non\; D_0(g)$

$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \;\; t.c. \;\; f(x) \in D(g)\} \;\; g \circ f = g\big(f(x)\big)$

4. Estremi di una funzione

Definizione. Si dice *estremo superiore* di f

$$\sup_f = \begin{cases} \sup se\; esiste\; finito \\ +\infty \text{ se } I(f) \text{ non è limitato} \end{cases} = \sup_{I(x)}$$

Definizione. Si dice *estremo inferiore* di f

$$\inf_f = \begin{cases} \inf se\; esiste\; finito \\ -\infty \text{ se } I(f) \text{ non è limitato} \end{cases} = \inf_{I(x)}$$

Definizione. Si dice *massimo di f* (se esiste)

$$\max_f = \max_{I(x)}$$

Un numero $M \in \mathbb{R}$ $t.c.$ $\begin{cases} f(x) \le M & \forall x \in D(f) \\ \exists x_0 \in D(f) \;\; t.c. & f(x_0) = M \end{cases}$

x_0 è detto *punto di massimo.*

Definizione. Si dice *minimo di f* (se esiste)

$$\min_f = \min_{I(x)}$$

Un numero $m \in \mathbb{R}$ $t.c.$ $\begin{cases} f(x) \ge m & \forall x \in D(f) \\ \exists x_0 \in D(f) \;\; t.c. & f(x_0) = m \end{cases}$

x_0 è detto *punto di minimo.*

Esempio.

$$f(x) = x \quad I(x) = \mathbb{R}$$
$$f(x) = 1 - x^2 \quad I(x) = (-\infty; 1]$$
$$f(x) = \arctan x \quad I(x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Definizione. Una funzione f è *limitata* se $I(f)$ è un insieme limitato:

$$\exists M > 0 \quad t.c. \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in D(f)$$

5. Esponenziali e Logaritmi

5.1. Esponente reale

Sia

$$r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \text{ intero; } a > 0; \rightarrow a^{r} := (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Le principali proprietà sono (si considera sempre $a > 0$):

- $a^0 = 1, a \neq 0;\ 1^c = 1\ \forall c$
- $a^c > 0\ \forall c; a^c \lesseqgtr 1$ se $a \lesseqgtr 1$ e $c > 0$
- $a^{c+d} = a^c \cdot a^d$
- $(ab)^c = a^c b^c$
- $(a^b)^c = a^{bc}$
- $c < d \Longrightarrow a^c \lesseqgtr a^d$ se $a \lesseqgtr 1$
- $0 < a \leq b \Longrightarrow a^c \geq b^c \quad \forall c > 0$

5.2. Logaritmo

Data la funzione (nella variabile x) $a^x = y$, si può dimostrare che:

$$a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, y > 0 \Longrightarrow \exists!\, x \in \mathbb{R} \ \ t.c.\ \ a^x = y$$

Tale numero x prende il nome di *logaritmo in base a di y*:

$$y = \log_a(x)$$

Infatti $a^{\log_a(x)} = x$. Dati a, x, y reale *positivi*, a $\neq 1$:

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$
- $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x\,,\ x \neq 1$
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

5.3. Funzioni esponenziali e logaritmiche

Dato $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$, sono definite le funzioni

$$f\colon (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \log_a x$$

e

$$g\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = a^x; \quad C(g) = (0;\ +\infty)$$

Queste funzioni sono legati dalla relazione

$$x = a^{\log_a x}, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

Cioè:

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

Esse sono *decrescenti* se $x < 1$ e *crescenti* se $x > 1$.

5.4. Disuguaglianza di Bernulli

$$\forall \; intero \geq 0, x \in \mathbb{R}, x \geq -1 : \boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx}$$

6. Funzioni trigonometriche

6.1. Funzione seno e coseno

Le funzioni

$$y = \cos x \; \text{ e } y = \sin x$$

sono definite per $f: \mathbb{R} \to [-1; +1]$ e sono periodiche di periodo $T = 2\pi$.
La funzione $\sin x$ è *dispari*, infatti $\sin(-x) = -\sin(x)$.
La funzione $\cos x$ è *pari*, infatti $\cos(-x) = \cos x$.

6.2. Funzione tangente e cotangente

La funzione

$$y = \tan x$$

è definita per $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}$ ed è periodica di periodo $T = \pi$. Essa è *dispari*, infatti $\tan(-x) = -\tan x$.
La funzione

$$y = \cot x$$

è definita per $f: \mathbb{R} - \{k\pi\} \to \mathbb{R}$ ed è periodica di periodo $T = \pi$. Essa è *dispari*, infatti $\cot(-x) = -\cot x$.

6.3. Relazioni fondamentali

I. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

II. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

III. $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

7. Funzioni iperboliche

7.1. Definizione

Sono definite le funzioni:

$$\text{Sh}: \textit{seno iperbolico} \; \to \boxed{\text{Sh}x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

$$\text{Sh}x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\text{Ch: } \textit{coseno iperbolico} \rightarrow \boxed{\text{Ch}x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

$$\text{Ch}x: \mathbb{R} \rightarrow [1; +\infty]$$

$$\text{Th: } \textit{tangente iperbolica} \rightarrow \boxed{\text{Th}x := \frac{\text{Sh}x}{\text{Ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

$$\text{Th}x: \mathbb{R} \rightarrow (-1; 1)$$

La funzione $\text{Ch}x$ è detta funzione *catenaria*.

7.2. Proprietà

1) Simmetria:

a. $\text{Sh}(-x) = -\text{Sh}(x)$, *funzione dispari*
b. $\text{Ch}(-x) = \text{Ch}(x)$, *funzione pari*
c. $\text{Th}(-x) = -\text{Th}(x)$, *funzione dispari*

2) Relazione:

a. $\text{Ch}^2(x) - \text{Sh}^2(x) = 1$

3) Formule:

a. $\text{Sh}(x + y) = \text{Sh}(x)\text{Ch}(y) + \text{Sh}(y)\text{Ch}(x)$
b. $\text{Ch}(x + y) = \text{Ch}(x)\text{Ch}(y) + \text{Sh}(x)\text{Sh}(y)$
c. $\text{Sh}(2x) = 2 \cdot \text{Sh}(x)\text{Ch}(x)$
d. $\text{Ch}(2x) = \text{Ch}^2(x) + \text{Sh}^2(x)$

7.3. Funzioni iperboliche inverse

- *Arcoseno iperbolico*: $\text{ArcSh}x = \frac{1}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
- *Arcocoseno iperbolico:* $\text{ArcCh}x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ *con* $x \geq 1$
- *Arcotangente iperbolica:* $\text{ArcTh}x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

7.4. Grafici

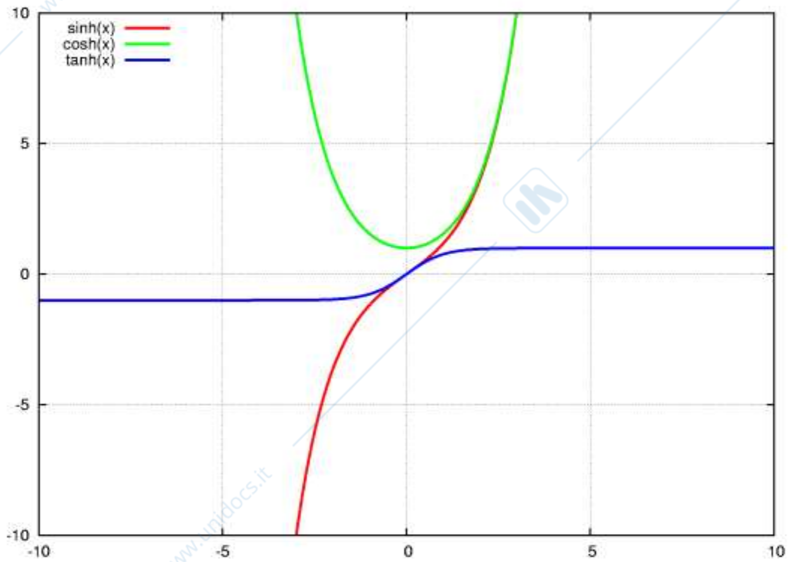

Figura 1 Grafico delle principali funzioni iperboliche