



Serie Numeriche

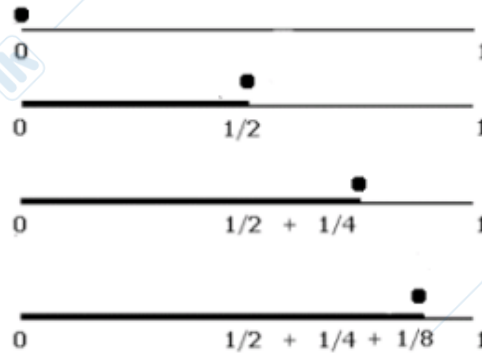
Author:
Livolsi Luca

1	Paradosso di Zenone	1
2	Definizioni e proprietà	1
3	Criteri e teoremi	5

*Tratto dalle lezioni di Analisi Matematica 1
del professor Vittorino Pata*

1. Paradosso di Zenone

Dato un segmento AB , lo si vuole percorrere in modo che ogni passo successivo sia la metà del precedente; il primo passo è la metà del segmento.



La distanza percorsa sarà:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

La distanza dopo n passi sarà:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{2^n - 1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2^n - 1}{2^n} \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

2. Definizioni e proprietà

Successione delle somme parziali

Definizione 2.1. Sia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ assegnata. A partire da a_n , si costruisce una nuova successione s_n , detta *successione delle somme parziali n-esime* o delle *ridotte n-esime*, così definita:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

s_n è la somma dei primi n termini.

Con il simbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si intende in letteratura sia la successione s_n che il suo limite. Si legge “serie di termine generale a_n ”.

Serie convergente

Definizione 2.2. Si dice che la serie a_n è *convergente* se la successione s_n ammette limite $s \in \mathbb{R}$. Il valore s è detto *somma della serie*, e si usa scrivere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \text{ [limite della successione } a_n]$$

Serie divergente

Definizione 2.3. Si dice che la serie a_n è *divergente* se la successione $s_n \rightarrow +\infty$ ($o-\infty$). Si indica con:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty(o-\infty)$$

Serie indeterminata

Definizione 2.4. Si dice che la serie a_n è *indeterminata/non regolare/oscillante* se non esiste limite di s_n :

$$\nexists \lim s_n$$

Carattere di una serie

Definizione 2.5. Si dice *carattere* di una serie il suo comportamento, cioè *divergente/convergente/irregolare*.

Esempio.

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
 - (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n$
 - (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$
- (i) Serie di Mengoli:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

\Rightarrow si semplifica: $s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ per $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

(ii) $a_n = n$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\Rightarrow s_n \rightarrow +\infty$ (serie divergente a $+\infty$)

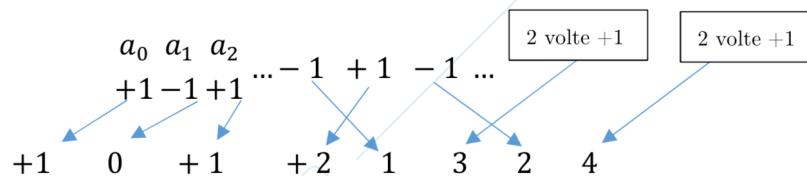
(iii) $s_0 = (-1)^0 = 1$

$$s_1 = a_0 + a_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 0$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1$$

$$s_n = \begin{cases} +1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Si può cambiare l'ordinamento di a_n



In questo modo si porta la serie a divergere; si dice *cambio dell'ordine della sommazione*.

Esempio. Siano date le serie

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ e } (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Esse sono convergenti. La (1) ha limite $= \frac{\pi^2}{6}$, e la sua dimostrazione è detta di Eulero. La (2) è stata dimostrata da Apéry ed ha limite irrazionale, ed è circa 1.

Inoltre, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

La successione $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ non ha limite dimostrabile.

Siano date le successioni a_n e b_n tali che $a_n > b_n \forall n \geq n_0$. Si considerano

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n$$

$$s'_n = \underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n_0}}_C + \underbrace{b_{n_0+1} + \dots + b_n}_0 \quad n \geq n_0$$

$$s_n - s'_n = C - 0 = C$$

Le due serie hanno lo stesso carattere, ma

$$\text{se } s_n \rightarrow s \text{ e } s'_n \rightarrow s' \implies s = C + s'$$

Teorema

Teorema 2.1. Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ serie convergenti e sia $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\implies \begin{cases} (1) \sum a_n \text{ converge} \\ (2) \sum (a_n + b_n) \text{ converge} \end{cases} \text{ e valgono:}$$

$$\begin{cases} (1) \sum (\alpha a_n) = \alpha \sum a_n \\ (2) \sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n \end{cases} \implies \begin{cases} \text{vera per } \begin{cases} +\infty + \infty \\ -\infty - \infty \\ +\infty + l \\ \text{non vale per } +\infty - \infty \end{cases} \end{cases}$$

ca so diverg

Serie di Cauchy

Definizione 2.6. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists k_0 \text{ t.c. } \forall k \geq k_0 \text{ e } \forall p \geq 0$$

Si ha

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} a_n \right| < \epsilon$$

La serie converge se e solo se la successione delle somme parziali è di Cauchy. Si dice che in questo caso è una *serie di Cauchy* o rispetta il *criterio di Cauchy*.

$$\sum_{n=k}^{k+p} a_n = \sum_{n=1}^{k+p} a_n - \sum_{n=1}^{k-1} a_n = s_{k+p} - s_{k-1}$$

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} a_n \right| < \epsilon \iff |s_{k+p} - s_{k-1}| < \epsilon$$

Corollario - Teorema

Teorema 2.2. Se $\sum a_n$ è convergente $\implies a_n \rightarrow 0$

[$a_n \rightarrow 0$ è condizione necessaria, non sufficiente]

$$a_n \not\rightarrow 0 \implies \sum a_n \text{ non converge}$$

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow 0, (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \rightarrow 1, (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n} \rightarrow \text{? limite}$$

La (3) e la (4) non convergono $\implies \neq 0$

Se $\sum a_n$ converge $\implies s_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

$$s_{n-1} = l \in \mathbb{R} \text{ (un passo prima)}$$

$$s_n - s_{n-1} = l - l = 0$$

$\forall \epsilon > 0 \exists k_0$ t.c. se $k \geq k_0$ (dimostrazione di Cauchy)

$$\left| \sum_{n=k}^k a_n \right| < \varepsilon \iff |a_k| < \varepsilon$$

Serie a termini positivi e negativi

Definizione 2.7. Una serie $\sum a_n$ si dice a *termini positivi* se $a_n \geq 0 \forall n$.
Una serie $\sum a_n$ si dice a *termini negativi* se $-\sum a_n$ è a termini positivi.

Teorema

Teorema 2.3. Se $\sum a_n$ è a termini positivi *definitivamente* allora

1. $\sum a_n$ converge
oppure
2. $\sum a_n$ diverge a $+\infty$

Dimostrazione

s_n è crescente, perché somma di elementi positivi.
Se $\sum a_n$ defin. a termini positivi $\implies s_n$ è defin. crescente
[(3) non converge \implies diverge a $+\infty$]
Il fallimento del test di convergenza e una certezza di divergenza.

Serie geometrica

Definizione 2.8. Si dice *serie geometrica* di ragione $q \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \implies s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

Inoltre:

- Se $q = 1 \implies s_n = n + 1$
- Se $q = -1 \implies s_n = \text{indeterminata}$
- Se $q \neq 1 \implies q \cdot s_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$

$$s_n - q \cdot s_n = 1 - q^{n+1}$$

$$(1 - q)s_n \implies s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{con } q \neq 1)$$

- Se $|q| < 1 \implies s_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$ (con $q^{n+1} \rightarrow 0$)
- Se $q > 1 \implies s_n \rightarrow +\infty$ (con $q^{n+1} \rightarrow +\infty$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indet.} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{Dato } |q| < 1 \implies \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \text{ con } |q| < 1$$

Da ciò

Serie di Zenone

Definizione 2.9. Si dice *serie di Zenone* la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = 1$$

Serie armonica

Teorema 2.4. La serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$

Dimostrazione

Se non converge \implies diverge a $+\infty$, perché è a termini positivi \implies non oscilla.

Per assurdo: si suppone che converga

$$\begin{aligned} &\implies \exists s \in \mathbb{R} \text{ t.c. } s_n \rightarrow s \\ &\implies s_{2n} \rightarrow s \implies s_{2n} - s_n \rightarrow s - s = 0 \\ s_{2n} - s_n &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \dots + \frac{1}{n+1} \text{ [n termini]} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \text{ [n volte]} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \\ &s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2} \implies \text{ASSURDO} \end{aligned}$$

\implies la serie armonica non converge

Costante di Eulero-Mascheroni

Teorema 2.5. $\sum_{k=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} - \log n \rightarrow \gamma \approx 0,5772$

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-t} \log t dt$$

Per arrivare a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1000 \sim \log n \implies e^{1000}$$

Cioè 10^{430} operazioni

3. Criteri e teoremi

Sia dato l'asintotico notevole:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n}{\log n} &\rightarrow \frac{\gamma}{\log n} \implies \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow 1}{\log n} \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \log n &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (n^2 - 1)}{n^2 \log(n+1)} = (\sim) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n \cdot n^2)}{n^2 \log n} = 1 \end{aligned}$$

Si analizza la rappresentazione decimale. Esprimendo i numeri nella forma

$$\begin{aligned} 0,214 &= \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} \\ 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} \end{aligned}$$

Si possono dunque esprimere i numeri periodici allo stesso modo:

$$\begin{aligned} 0, \bar{9} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} \implies 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \implies \text{serie geometrica di ragione } q \\ &9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1 - q} \end{aligned}$$

Successione inferiormente limitata

Definizione 3.1. Una serie $\sum a_n$ si dice *telescopica* se $\exists b_n$ t.c. $a_n = b_n - b_{n+1}$

$$\begin{aligned} &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1} \\ &\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \implies s_n = a_1 + \dots + a_n \\ &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

Se $b_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \implies \sum a_n = b_1 - l$ (converge)

Se $b_n \rightarrow \pm\infty \implies \sum a_n = \mp\infty$

Se $b_n \rightarrow / \implies \sum a_n$ è indeterminata

Teorema. Criterio del confronto

Teorema 3.1. Siano $0 \leq a_n \leq b_n \forall n$, allora

(1) se $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge

(2) se $\sum a_n = +\infty \implies \sum b_n = +\infty$

Dimostrazione

(2) Siano:

$$\left. \begin{aligned} s_n &= a_1 + \dots + a_n \\ s'_n &= b_1 + \dots + b_n \end{aligned} \right\} \implies 0 \leq s_n \leq s'_n$$

Se $\sum a_n$ diverge, significa che $s_n \rightarrow +\infty$

$s'_n \rightarrow +\infty$ (2° deg. criterio/teorema del confronto successioni)

Sia $\varepsilon > 0$. Allora poiché $\sum b_n$ converge, $\exists k_0$ t.c.

$$\begin{aligned} \forall k \geq k_0, \forall p \geq 0 \\ \sum_{n=k}^{k+p} b_n < \varepsilon \end{aligned}$$

Ma poiché $a_n \leq b_n \implies$

$$\sum_{n=k}^{k+p} a_n \leq \sum_{n=k}^{k+p} b_n < \varepsilon \implies \sum a_n \text{ converge}$$

(1) Siano:

$$\left. \begin{aligned} s_n &= a_1 + \dots + a_n \\ s'_n &= b_1 + \dots + b_n \end{aligned} \right\} \implies 0 \leq s_n \leq s'_n$$

Per ipotesi s'_n converge $\implies s'_n \leq M$ (limitata) $\implies s_n \leq s'_n \leq M \implies s_n$ limitata

Ma s_n è anche monotona $\implies s_n$ converge.

Nelle ipotesi era richiesto $0 \leq a_n \leq b_n \forall n$, tuttavia sarebbe solamente necessario

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{ definitivamente}$$

Applicazione del teorema La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

Dato $a_n = \frac{1}{n^2}$, se

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} \implies$$

sarebbe sufficiente per dire che converge, tuttavia è falso.

Infatti, trasformando e moltiplicando per 2:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$$

si ottiene una disuguaglianza vera.

$\frac{2(\rightarrow \text{converge})}{n(n+1)(\rightarrow \text{converge})} \rightarrow \text{converge} \implies \frac{1}{n^2}$ converge per il teorema del confronto

e converge a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ (no dimostrazione)}$$

Serie Numeriche

Serie armonica generalizzata

Definizione 3.2. Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Allora

- $\alpha \geq 2 \implies \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^2} \implies \sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge (1° confronto (1° punto del teorema))
- $\alpha \leq 1 \implies \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{converge se } \alpha \geq 2 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \\ \text{se } \alpha \in (1; 2) \text{ non dimost. con confronto} \end{cases} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

- $\alpha \in (1; 2) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Esempio. Dato

$$q(n) = \{\text{numero di interi di quadrati minori o uguali ad } n\}$$

$$\implies q(n) \sim \sqrt{n}$$

Esempio. $\pi(n) = \{\text{numero dei primi } \leq n\}$

$$\pi(12) = 5$$

Teorema dei numeri primi

Teorema 3.2.

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$$

Se

$$\sum_{n \in \text{Primi}} \frac{1}{n} = +\infty$$

Infatti

$$\sum \frac{3 + \cos n(\rightarrow [-1; 1])}{n^{\alpha}} \rightarrow 2 \frac{1}{n^{\alpha}} \leq a_n \leq 4 \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Esempio. Sia $a_n \geq 0$ e $\sum a_n < \infty$ (converge perchè a_n è a termini positivi).

$$\implies \sum \frac{\sqrt{a_n}}{n} < \infty \text{ (converge)}$$

Teorema del confronto asintotico

Teorema 3.3. Sia $a_n, b_n > 0$ e t.c. $a_n \sim b_n \implies \sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.

Esempio. Dato $\sum n^{\beta} \log\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+2}\right)$, stabilire il carattere della serie al variare del parametro reale β .

$$\beta \in \mathbb{R} \log\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+2}\right) \sim \frac{2n^2+3}{2n^2+2} - 1 = \frac{2n^2-3+2n^2-2}{2n^2+2} = \frac{1}{2n^2+2} \sim \frac{1}{2n^2}$$

$$a_n \sim c \cdot \frac{1}{n^{2-\beta}} b_n = c \cdot \frac{1}{n^{2-\beta}}$$

$$\text{converge} \iff 2 - \beta > 1 \implies \beta < 1$$

Teorema

Teorema 3.4. $a_n \sim b_n \iff a_n = b_n(1 + \varepsilon_n)$

Infatti $\frac{1}{2} \leq 1 + \varepsilon_n \leq 2$ definit. \implies

$$\frac{1}{2} b_n \text{ (usato per dim. converg.)} \leq a_n \leq 2 b_n \text{ (usato per dim. diverg.) defin.}$$

⇒ La tesi segue dal confronto

Serie campione

Definizione 3.3. Si dice *serie campione* la serie

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \begin{cases} \alpha > 1 \rightarrow \text{converge} \\ \alpha < 1 \rightarrow \text{diverge a } +\infty \\ \alpha = 1 \begin{cases} \beta > 1 \text{ converge} \\ \beta < 1 \text{ diverge} \end{cases} \end{cases} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Per $\beta = 1$, si modifica la successione:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta (\log(\log n))^{\gamma=0}}$$

e si utilizza lo schema:

$$\begin{cases} \alpha > 1 \rightarrow \text{converge} \\ \alpha < 1 \rightarrow \text{diverge a } +\infty \\ \alpha = 1 \begin{cases} \beta > 1 \rightarrow \text{converge} \\ \beta < 1 \rightarrow \text{diverge} \\ \beta = 1 \begin{cases} \gamma = 0 < 1 \text{ diverge} \\ \text{(eventuale reiterazione)} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Se ci fossero più funzioni logaritmiche annidate,

$$\log(\dots)^x \log(\log(\dots))^\psi \log(\log(\log(\dots)))^\omega$$

⇒ ω sarebbe la variabile meno rilevante e dunque sarebbe l'ultimo esponente controllato.

Teorema. Criterio del rapporto

Teorema 3.5. Sia $a_n \geq 0$ e t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L \in [0; +\infty]$, allora se

$$\begin{cases} L > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge a } +\infty \\ L < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ L = 1 \Rightarrow \text{non vale} \end{cases}$$

Serie fattoriale

Definizione 3.4. Si dice *serie fattoriale* la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Essa converge ad e^x , $n!$ è infinito maggiore, $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione

$$x > 0 \rightarrow \frac{x^n}{n!} \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$$

La serie fattoriale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (\text{quando } x^n = 1(1^n))$$

$$s_7 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \approx 2,7182 \approx e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Stima dell'errore di approssimazione Stabilito $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$s_n \rightarrow e^- \implies e - s_n \geq 0$$

$$0 \leq e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right\} <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right\} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$$

$$0 \leq e - s_n < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!}$$

$\sum \frac{1}{n!}$ converge molto velocemente

Irrazionalità di e

Teorema 3.6. e è irrazionale.

Dimostrazione per assurdo

$$e \in \mathbb{Q} \implies e = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \text{ interi}$$

$$0 < e - s_q = \frac{p}{q} - s_q < \frac{1}{q \cdot q!}$$

$$0 < p - q \cdot s_q < \frac{1}{q!} \Rightarrow 0 < p \cdot q! - q \cdot q! s_q < 1 \rightarrow q! s_q \text{ è intero}$$

$$q \cdot q! s_q \rightarrow \text{intero} \implies \nexists x \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 0 < x < 1$$

Criterio di Leibniz

Teorema 3.7. Sia assegnata la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

Dove a_n soddisfa:

1. $a_n \rightarrow 0$
2. $a_{n+1} \leq a_n \forall n$: $a_n \downarrow 0$ monotonamente decrescente

Tesi: La serie converge e detta s la sua somma:

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

Esempio. Sia data la serie armonica a segno alterno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \implies a_n = \frac{1}{n} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$$

$$\left| -\log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right| < \frac{1}{n+1}$$

Osservazione: la (1) nelle ipotesi si può sostituire con $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente.

Esempio.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{1+n^2} \implies a_n = \frac{\cos(n\pi)}{1+n^2}$$

E' una serie oscillante. Si controllano i punti del criterio di Leibniz.

Esempio.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8n}{10+n^2} \implies a_n = \frac{8n}{10+n^2}$$

(1) $a_n \rightarrow 0$ verificato

Il punto (2) lo si verifica con lo studio della relativa funzione:

$$f(x) = \frac{8x}{10+x^2} \implies f'(x) \leq 0 \text{ per } x \geq x_0$$

Serie convergente assolutamente

Definizione 3.5. Una successione Σa_n converge assolutamente se converge la serie $\Sigma |a_n|$ (detta dei moduli di a_n)

Relazione tra convergenza assoluta e convergenza

Teorema 3.8. Se una serie Σa_n converge assolutamente $\implies \Sigma a_n$ converge.

Non vale anche \Leftarrow . Si verifica con il controesempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \implies \text{converge (Leibniz)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ e } \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Dimostrazione

■ (1°):

$$\Sigma |a_n| \text{ converge} \implies (\text{crit. Cauchy}) \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \text{ t.c. } \forall k \geq k_0 \text{ e } \forall p \geq 0$$

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \implies \left| \sum_{n=k}^{k+p} a_n \right| \leq \sum_{n=k}^{k+p} |a_n| < \varepsilon \forall k \geq k_0, \forall p \geq 0$$

Σa_n soddisfa il criterio di Cauchy (\rightarrow cond. neces. e suff.) $\implies \Sigma a_n$ è convergente

■ (2°): (Per completezza di \mathbb{R})

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \text{ si pone } b_n = a_n + |a_n|$$

Poiché $\Sigma 2|a_n|$ converge \implies la serie Σb_n converge (dal 1° teo. confr.)

$$\implies \Sigma a_n = \Sigma a_n + |a_n| - |a_n| = \Sigma b_n - |a_n| = \Sigma b_n - \Sigma |a_n|$$

Esempio Trovare un esempio di a_n tale che Σa_n converge ma Σa_n^2 diverge a $+\infty$

Osservazione: a_n non può avere segno costante. Infatti se $a_n \geq 0$ e $a_n \rightarrow 0 \implies 0 \leq a_n^2 \leq a_n$ defin. (a^2 converge per teo. del confr.)

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \implies \Sigma a_n^2 \text{ diverge a } +\infty$$

Esempio. Trovare un esempio di a_n tale che Σa_n converge ma Σa_n^3 diverge a $+\infty$.

Questa serie è estremamente difficile da trovare.

Riarrangiamento

Definizione 3.6. Data la successione a_n , si dice che b_n è un riarrangiamento di a_n se \exists una funzione $j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ biunivoca tale che $b_n = j(a_n)$ (stessi elementi di a_n , ma con ordine diverso)

Riarrangiamento di una serie

Definizione 3.7. Data una serie Σa_n si dice che la serie Σb_n è un riarrangiamento di Σa_n , se \exists una funzione $j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ biunivoca tale che $b_n = j(a_n)$

Convergenza incondizionata

Definizione 3.8. Una serie Σa_n converge incondizionatamente se ogni suo riarrangiamento Σb_n converge.

Teorema di Reimann**Teorema 3.9.**

1. Se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente \implies converge incondizionatamente e ogni suo riarrangiamento converge allo stesso limite.
2. Se la serie $\sum a_n$ converge, ma non converge assolutamente \implies preso un qualsiasi valore $l \in \mathbb{R}$, \exists un riarrangiamento b_n di a_n t.c.

$$\sum b_n = l$$

*** Dimostrazione della serie dei numeri primi**

Sia $\{p_n\}, n \in \mathbb{N}$, la successione crescente dei numeri primi.

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7 \dots \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$$

Osservazione: Sia $n \in \mathbb{N}$

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \alpha_1 \dots \alpha_n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Si fissa N

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} &\leq \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_n^3} + \dots\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \\ \implies \prod_{n=1}^N \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}\right) &= \exp \left[\log \prod_{n=1}^N \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}\right) \right] = \exp \left[\sum_{n=1}^N \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}\right) \right] \end{aligned}$$

Dunque $\forall x \in (0; \frac{1}{2}]$ si ha che

$$\begin{aligned} -\log(1-x) &\leq \frac{1}{x} \implies \\ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} &\leq \exp \left[\sum_{n=1}^N \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}\right) \right] \text{ e } \exp \left[\sum_{n=1}^N \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}\right) \right] \leq \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right) \right] \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right) &\geq \log \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right) \text{ converge a } +\infty \end{aligned}$$