Sommatorie:

Siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ numeri. Scriveremo:

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ per indicare il numero $x_1+x_2+\dots+x_n$

<u>Principio di induzione</u>:

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$. Per ogni $n \geq n_0$ sia $P(n)$ una proprietà ben definita. Supponiamo:

1) $P(n_0)$ è vera
2) Se per $n \geq n_0$, $P(n)$ è vera allora $P(n+1)$ è vera.

Allora: $\forall\, n \geq n_0$ $P(n)$ è vera

Fattoriali:

Se $n \in \mathbb{N}$, scriveremo:

$$n! = \text{"n fattoriale"} = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 1 & \text{se } n=1 \\ n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Coefficienti binomiali:

Siano $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$, scriveremo:

$\binom{n}{k}$ = "coefficiente binomiale di n(elementi) in (classe) k"

per indicare il numero $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Relazione d'ordine:

Dato un insieme A, una relazione d'ordine è un sottoinsieme R di $A \times A$ tale che:

1) $(a,a)\in R$

2) se $(a,a')\in R$ e $(a',a)\in R$ allora $a=a'$

3) se $(a,a')\in R$ e $(a',a'')\in R$ allora $(a,a'')\in R$.

Inoltre si ha anche che: $\forall\, a,a'\in A$ si ha $(a,a')\in R$ oppure $(a',a)\in R$ allora si dice che A è totalmente ordinato

Teorema:

$\nexists\, x\in \mathbb{Q}$ tale che $x^2=2$ (cioè $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$)

Insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$:

Un numero reale è un allineamento decimale

proprio
- limitato (es 8,345)
- illimitato periodico (es $9,\overline{3}$)
- illimitato non periodico (es. $\sqrt{2}$)

Teorema di completezza:

Per ogni coppia di insiemi $A,B\subseteq\mathbb{R}$ tali che $\forall a\in A\ \forall b\in B$ si ha $a\le b$

Allora $\exists\, c\in\mathbb{R}$ tale che $a\le c\le b$

(c è detto "separatore") $\forall a\in A\ \forall b\in B$

Modulo:

Dato $a\in\mathbb{R}$, definiamo "modulo di a" il numero:

$$|a|=\begin{cases} a & \text{se } a\ge 0\\ -a & \text{se } a<0\end{cases} \quad (=\sqrt{a^2})$$

Teorema:

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ abbiamo:

1) $|x+y| \le |x| + |y|$ ("disuguaglianza triangolare")

2) $\big||x| - |y|\big| \le |x-y|$

Maggioranti, minoranti:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Diremo che A è superiormente limitato quando $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tale che $M \ge a$ $\forall\, a \in A$. Un tale elemento M è detto maggiorante di A. Diremo che A è inferiormente limitato quando $\exists\, m \in \mathbb{R}$ tale che $m \le a$ $\forall\, a \in A$. Un tale elemento m è detto minorante di A. Se A non ammette maggioranti (minoranti) diremo che A è superiormente (inferiormente) illimitato. Diremo che A è limitato quando $\begin{cases} \exists\, M \text{ maggiorante di } A \\ \exists\, m \text{ minorante di } A \end{cases}$

cioè quando $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ tali che

$$m \le a \le M \quad \forall\, a \in A$$

Massimi, minimi:

Un maggiorante di A che appartiene ad A è detto massimo di A ("max A").
Un minorante di A che appartiene ad A è detto minimo di A (min A)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, superiormente limitato.
Un numero S è detto estremo superiore di A quando S è il minimo tra i maggioranti di A, cioè: $S = \sup A$ quando $S = \min\{\text{magg}^{\text{nti}} \text{ di } A\}$.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, inferiormente limitato.
Un numero $I \in \mathbb{R}$ è detto estremo inferiore di A quando I è il massimo dei minoranti di A, cioè: $I = \inf A$ quando $I = \max\{\text{minoranti di } A\}$

Teorema di completezza (II forma):
Se $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ ed è superiormente [inferiormente] limitato, allora $\exists \sup A$ [$\inf A$]

Teorema di caratterizzazione del sup e dell'inf:
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$
*) Se A è superiormente limitato:

$$S = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(•) } S \text{ è maggiorante di } A \\ \text{(•) } \forall \varepsilon > 0 \quad S - \varepsilon \text{ non è maggiorante di } A \end{cases}$$

*) se A è inferiormente limitato:

$$I = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(•) } I \text{ è minorante di } A \\ \text{(•) } \forall \varepsilon > 0 \quad I + \varepsilon \text{ non è minorante di } A \end{cases}$$

Potenze e radici intere: NO
Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $p \in \mathbb{Z}$ definiamo:

$$\alpha^p = \begin{cases} \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha \ (p \text{ volte}) & \text{se } p > 0 \\ 1 & \text{se } p = 0 \\ \dfrac{1}{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha \ (p \text{ volte})} & \text{se } p < 0 \end{cases}$$

Teorema: NO

Siano $y \in \mathbb{R}, y \geq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Allora $\exists!$ $z \in \mathbb{R}, z \geq 0$ tale che $z^n = y$ (sarà denotato con $\sqrt[n]{y}$ o con $y^{\frac{1}{n}}$) ed è individuat come:

$$z = \sup\{a \geq 0 : a^n \leq y\}$$

Potenze razionali: NO

Siano $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ e $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q > 0$,
Definiamo:

$$a^{\frac{p}{q}} \begin{cases} \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p & \text{se } a \neq 0 \text{ o } p \neq 0 \\ 0 & \text{se } a = 0, p \neq 0 \\ 1 & \text{se } a > 0, p = 0 \end{cases}$$

Potenze reali: NO

Sia $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$; sia $z \in \mathbb{R}, z \geq 0$,
Definiamo:

$$a^z = \begin{cases} \sup\{a^s : s \in \mathbb{Q}, s \leq z\} & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^z} & \text{se } a \in (0,1) \end{cases}$$

Analogamente per $z < 0$

Teorema: Siano $a, y \in \mathbb{R}$, entrambi positivi, con $a \neq 1$. Allora:
$\exists! \, x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$ ed è individuato da:

$$x = \begin{cases} \sup\{r : a^r \leq y\} & \text{se } a > 1 \\ \sup\{r : a^r \geq y\} & \text{se } a \in (0,1) \end{cases}$$

Il numero x è detto "logaritmo di y in base a" e denotato con $\log_a y$

Numeri complessi:
1) "i" = unità immaginaria = (sarà $i = \sqrt{-1}$)
2) Definiamo:
$\mathbb{C} = \{\text{numeri complessi}\} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$
(di fatto gli elementi di $\mathbb{C}$ sono una coppia ordinata (x, y) di numeri reali)
3) Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ("forma algebrica di z")
Scriveremo:
$Re(z) = x$ = "parte reale di z"
$Im(z) = y$ = "parte immaginaria di z"

Somma e prodotto in $\mathbb{C}$:
- somma: siano $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, definiamo:
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
- prodotto: ——— // ———
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Teorema: Con queste due operazioni di somm. e prodotto, l'insieme $\mathbb{C}$ è un campo. Inoltre:

1) elemento neutro della somma è $0+i0=0$
2) elemento neutro del prodotto è $1+i0=1$
3) opposto: dato z, il suo opposto è z' (cioè tale che $z+z'=0$) è:

$$z'=(-x)+i(-y)$$

4) inverso: dato $z\neq 0$, il suo inverso z'' (cioè tale che $z\cdot z''=1$) è:

$$z''=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}$$

Coniugato di z:
Dato $z=x+iy\in\mathbb{C}$ (con $x,y\in\mathbb{R}$) chiameremo "coniugato di z" (denotato $\bar{z}$) il numero complesso: $\bar{z}=x-iy$

Teorema proprietà del coniugato:
Sia $z=x+iy\in\mathbb{C}$ (con $x,y\in\mathbb{R}$), Allora si ha:

1) $z+\bar{z}=2x=2Re(z)=2Re(\bar{z})\Rightarrow Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$
2) $z-\bar{z}=2y=i2Im(z)=-i2Im(\bar{z})\Rightarrow Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$
3) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$
4) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$; $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
5) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$
6) $\overline{(\bar{z})}=z$

Teorema fondamentale dell'algebra:

Sia data una equazione polinomiale in $\mathbb{C}$ di grado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ cioè:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

con $a_n \neq 0$ e $a_i \in \mathbb{C}$ $\forall\ i = 0, 1, \dots, n-1, n$

Allora questa equazione ha (almeno) una soluzione in $\mathbb{C}$

Definizione:

Sia $P(z)$ un polinomio di grado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{C}$, cioè $P(z) = a_n z^n \dots + a_0$

Se z_0 è un suo zero o soluzione (cioè $P(z_0) = 0$), diremo che z_0 è uno zero di $P(z)$ con molteplicità $K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ quando esiste un polinomio $Q(z)$ di grado $n-K$, tale che:

1) $P(z) = (z - z_0)^K Q(z)$

2) z_0 non è zero di $Q(z)$ (cioè $Q(z_0) \neq 0$)

Teorema:

Sia $P(z)$ un polinomio $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $a_n \neq 0$ tutti gli $a_i \in \mathbb{R}$

Se z_0 è uno zero di $P(z)$ (cioè $P(z_0) = 0$) allora anche $\overline{z_0}$ è uno zero di $P(z)$

Modulo di z:

Se $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$) chiamiamo modulo di z il numero in $\mathbb{R}$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Teorema sulle proprietà del Modulo:

1) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ e $|z|=0 \Longleftrightarrow z=0$

2) $|z| = |\bar{z}|$

3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

4) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Teorema: (disuguaglianza triangolare in $\mathbb{C}$)

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si ha:

1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

2) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

Forma esponenziale:

Per $\theta \in \mathbb{R}$ denoto con $e^{i\theta}$ il numero di $\mathbb{C}$:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Definizione:

Sia $z = x+iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$). Allora denotiamo:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy}$$

Funzioni:

Siano X, Y due insiemi entrambi $\neq \emptyset$. Chiameremo funzione da X in Y una legge (o corrispondenza) che ad ogni elemento $x \in X$ associa un unico elemento $y \in Y$ (denotato con "$f(x)$", detto "valore di f in x").

X è detto dominio di f

Y —"— codominio di f

Scriveremo: $f: X \longmapsto Y$ oppure $y = f(x)$

$x \longmapsto f(x)$

Chiameremo "immagine di f" il sottoinsieme di Y:

$\{y \in Y : \exists x \in X$ tale che $f(x) = y\}$ denotato con $f(X)$

Chiameremo "grafico di f" il sottoinsieme di $X \times Y$:

$\{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$

Funzioni reali e a variabile reale:

Sia $f\, X \longrightarrow Y$ una funzione, diremo:

- f è una funzione reale se $Y = \mathbb{R}$
- ——— " ——— a variabili reali se $X = \mathbb{R}$

Funzione composta:

Siano $f: X \longmapsto Y$ e $g: V \longmapsto Z$ due funzioni

Supponiamo che $f(X) \cap V \neq \emptyset$. Introduciamo:

$\overline{X} : \{x \in X : f(x) \in V\}$

Definiamo "funzione composta" (denotata con $g \circ f$) la funzione:

$g \circ f : \overline{X} \longmapsto Z$

$x \longmapsto g(f(x))$

Funzione iniettiva:

Sia $f: X \longmapsto Y$ una funzione. Diremo che f è iniettiva quando:

$\forall x_1, x_2 \in X$, se $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

o equivalentemente

$\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$: $f(x_1) \neq f(x_2)$

Funzione suriettiva:

Sia $f: X \longmapsto Y$ una funzione. Diremo che f è suriettiva quando: $\forall y \in Y \; \exists x \in X$ tale che $f(x) = y$ cioè quando l'immagine di $f(X)$ coincide con il codominio Y

Funzione biunivoca:

Diremo che f è biunivoca quando è sia iniettiva che suriettiva

Funzione inversa:

Se $f: X \longmapsto Y$ è iniettiva, allora possiamo definire la sua funzione inversa (denotata f^{-1})

$$f^{-1}: f(X) \longmapsto X$$
$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \text{è l'unico elemento } x \in X \text{ tale che } f(x) = y$$

Restrizione di f su A:

Sia $f: X \longmapsto Y$ una funzione, sia $A \subseteq X$. Chiamo restrizione di f su A:

$$f_{|A}: A \longmapsto Y$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Inoltre se $f_{|A}$ è iniettiva, allora diremo che f è invertibile su A (e denotiamo con $f_{|A}^{-1}$ la sua funzione inversa)

Funzioni pari e dispari:

Sia $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Diremo:

- f è pari quando $f(x) = f(-x)$
- f è dispari quando $f(x) = -f(-x)$

Funzioni periodiche:
Sia $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che f è periodica di periodo minimo $T \geq 0$ quando T è il più piccolo numero in $[0, +\infty)$ tale che:

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \text{dom} f$$

Funzioni monotone crescenti/decrescenti, strettamente crescenti/decr.:
Sia $f: \text{dom} f \longmapsto \mathbb{R}$. Diremo che f è monotona crescente [decrescente] quando:

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom} f$ con $x_1 \leq x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$
[—————— " —————— $f(x_1) \geq f(x_2)$]

Diremo che f è strettamente crescente [decrescente] quando:

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom} f$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$
[—————— " —————— $f(x_1) > f(x_2)$]

Funzioni limitate:
Diremo che la funzione f è limitata [limitata superiormente o inferiormente] quando l'immagine di $f = \text{Im}(f) = f(\text{dom} f)$ è limitata [limitata superiormente o inferiormente]. Diremo che f è illimitata quando lo è $\text{Im}(f)$

Maggioranti, minoranti, massimo, minimo, ecc.:
Chiameremo maggiorante [minorante] di f ogni maggiorante [minorante] di $\text{Im}(f)$.
Analogamente chiameremo massimo, minimo, estremo superiore e inferiore di f, denotato rispettivamente $\max f, \min f, \sup f, \inf f$ i

corrispondenti valori per $Im(f)$. Se esistono, i valori $\max f$ e $\min f$ sono detti (valori) estremi di f. Se esiste $x_m \in \text{dom} f$ [$x_M \in \text{dom} f$] tale che $f(x_m) = \min f$ [$f(x_M) = \max f$] allora diremo che x_m [x_M] sono punti di minimo [massimo] di f e li chiameremo punti estremanti

Intorni sferici:

Sia $r \in \mathbb{R}^*$. Allora:

- Se $r \in \mathbb{R}$, un intorno (sferico) di r è un intervallo della forma $(r-\varepsilon; r+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$
- se $r = +\infty$ un intorno sferico di $+\infty$ è un intervallo della forma $(M, +\infty)$ con $M \in \mathbb{R}$
- se $r = -\infty$ un intorno sferico di $-\infty$ è un intervallo della forma $(-\infty, N)$ con $N \in \mathbb{R}$

Punto di accumulazione:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Diremo che $r \in \mathbb{R}^* (= \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ è un punto di accumulazione di A quando:

$\forall\, U$ intorno di r: $(A \cap U) \setminus \{r\} \neq \emptyset$

Punto isolato:

Se $r \in A$ e non è punto di accumulazione di A, diremo che r è un punto isolato di A

Proprietà verificata definitivamente.

Sia $f: \text{dom} f \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Sia x_0 un punto di acc^{ne} del dom f. Diremo "f verifica definitivamente la proprietà P per x che tende ad x_0" quando $\exists$ un intorno U di x_0 tale che $f(x)$ verifica P $\forall x \in (\text{dom} f \cap U) \setminus \{x_0\}$

$g(x)$ verifica P per $x \to x_0$

Limite di una funzione:

Sia $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di acc.ne di dom f. Il valore $l \in \mathbb{R}^*$ è detto "limite di f per $x \to x_0$", denotato

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \text{ quando:}$$

$\forall U$ intorno di l $\exists V$ intorno di x_0 tale che
$f(x) \in U \quad \forall x \in (\text{dom} f \cap V) \setminus \{x_0\}$

Limite finito, infinito, infinitesimo:

- se $l \in \mathbb{R}$ diremo che il limite è finito
- se $l = \pm\infty$ —— " —— infinito
- se $l = 0$ diremo che per $x \to x_0$ f è infinitesimo

Teorema sull'unicità del limite di funzioni:

Se $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ è una funzione, se x_0 è punto di acc.ne di dom f, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$, allora il limite è unico

Funzioni iperboliche:

- "coseno iperbolico" $= \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad D = \mathbb{R}$
- "seno iperbolico" $= \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ —— " ——
- "tangente iperbolica" $= \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ —— " ——

Teorema limite finito implica locale limitatezza:

Assumiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Se $l \neq \pm\infty$, allora $\exists U$ intorno di x_0 ed $N > 0$ tale che $|f(x)| < N \quad \forall x \in \text{dom} f \cap U$

Punto di acc^ne destro e sinistro:
Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Un punto $r \in \mathbb{R}$ è detto punto di acc^ne destro [sinistro] di A quando è punto di acc^ne di $A \cap (r, +\infty)$ [$A \cap (-\infty, r)$]
Chiameremo intorni destri [sinistri] di r gli insiemi della forma $(r, r+\delta)$ [$(r-\delta, r)$] per qualche $\delta > 0$

Limite destro e sinistro:
Sia $f: \mathrm{dom} f \longmapsto \mathbb{R}$, sia x_0 un punto di acc^ne destro [sinistro] di dom f. Diremo che "f ha limite destro [sinistro] per x che tende a x_0" e scriveremo $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$ [$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$]

quando: $\lim_{x \to x_0} f_{|(x_0, +\infty)}(x) = l$ [analogamente]

Teorema di unicità del limite destro e sinistro:
Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$ allora $l_1 = l_2$

[analogamente per $x \to x_0^-$]

Teorema di relazione tra limite destro e sinistro:
Sia x_0 un punto di acc^ne sia destro che sinistro di dom f (quindi $x_0 \neq \pm\infty$), allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \end{cases}$$

Teorema di relazione tra limite e modulo:
Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di acc^ne di dom f, allora:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$

2) $\lim_{x \to x} f(x) = l \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow \lim_{x \to x} |f(x)| = |l|$

Teorema sulla permanenza del segno:

Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $x_0, l \in \mathbb{R}^*$

1) Se $l \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ (cioè l è positivo) allora $f > 0$ definitivamente per $x \to x_0$

2) se $l \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$ (cioè l è negativo) allora $f < 0$ definitivamente per $x \to x_0$

Teorema dei carabinieri - caso limitato:

Siano f, g, h tre funzioni, tutte definite sullo stesso insieme $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di acc^ne di X. Assumiamo:

1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \to x_0$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$ ($x_0 \in \mathbb{R}^*$, $l \in \mathbb{R} \to$ caso limitato)

Teorema dei carabinieri - caso illimitato:

Siano f e g due funzioni definite sullo stesso insieme $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di acc^ne di X.

Supponiamo:

1) $f(x) \leq g(x)$ def^nte per $x \to x_0$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $[\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty]$

Allora: $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ $[\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty]$

Teorema sull'algebra dei limiti (con limiti in $\mathbb{R}$):
Siano f e g due funzioni definite su $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di acc^{ne} di X. Valgano

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f \in \mathbb{R} \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$$

Allora:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l_f \cdot l_g$

2) $\lim_{x \to x_0} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \cdot l_f + \beta \cdot l_g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g}$ se $l_g \neq 0$

Teorema sull'algebra dei limiti in $\mathbb{R}^*$:
Siano f, g ed x_0 come nel teorema precedente.
Allora:

1) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ è def^{nte} limitata per $x \to x_0$

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

2) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $[-\infty]$ e se g è def^{nte} limitata per $x \to x_0$ allora:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty \ [-\infty]$$

3) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $[-\infty]$ e se $\exists\, m > 0$ t.c. $g(x) \geq m$ def^{nte} per $x \to x_0$. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty \ [-\infty]$$

4) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $[-\infty]$ e se $\exists\, M > 0$ t.c. $0 < g(x) < M$ def^{nte} per $x \to x_0$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ $[-\infty]$

Teorema del confronto:

Siano f, g, x_0 come nel teorema precedente. Valgano:

•) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}^*$

•) $f(x) \leq g(x)$ def^{nte} per $x \to x_0$

Allora $l_f \leq l_g$

Teorema del cambio di variabile ~~nei limiti~~:

Siano $f: Z \to \mathbb{R}$, $g: V \to \mathbb{R}$ due funzioni $\begin{pmatrix} Z \subseteq \mathbb{R} \\ V \subseteq \mathbb{R} \end{pmatrix}$

Allora la funzione $g \circ f$ è definita sull'insieme

$$X := \{x \in Z : f(x) \in V\}$$

Sia x_0 un punto di acc^{ne} di X. Assumiamo:

I) $\lim f(x) = y_0 \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} y_0 \text{ è punto di acc}^{ne} \text{ di } V \\ \lim_{y \to y_0} g(y) = l \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

II) vale una delle seguenti:

a) $f(x) \neq y_0$ def^{nte} per $x \to x_0$

b) $g(y_0) = l$ (cioè g continua in y_0)

Allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = l$

Teorema sul limite delle funzioni monotone:
Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Sia x_0 un punto di acc^{ne} sinistro di X. Sia f monotona (cioe' crescente o decrescente) su $X \cap (-\infty, x_0)$.

Allora: $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ $\exists$ e vale $\begin{cases} \sup_{X \cap (-\infty, x_0)} f & \text{se } f \text{ crescente} \\ \inf_{X \cap (x_0, +\infty)} f & \text{se } f \text{ decrescente} \end{cases}$

Analogamente: se x_0 e' un punto di acc^{ne} destro di X e se f e' monotona su $X \cap (x_0, +\infty)$, allora

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ esiste e vale } \begin{cases} \inf_{X \cap (x_0, +\infty)} f & \text{se } f \text{ e' crescente} \\ \sup_{X \cap (x_0, +\infty)} f & \text{se } f \text{ e' decrescente} \end{cases}$$

Teorema sul limite delle funzioni monotone, caso $x_0 = \pm\infty$:

•) Se $x_0 = +\infty$ e' pt di acc^{ne} di dom f. Se f e' def^{nte} monotona per $x \to +\infty$ (quindi: $\exists\, U$ intorno di $+\infty$ t.c. f e' monotona su dom $f \cap U$). Allora:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ esiste e vale } \begin{cases} \sup_{\text{dom} f \cap U} f(x) & \text{se } f \text{ e' crescente} \\ \inf_{\text{dom} f \cap U} f(x) & \text{se } f \text{ e' decrescente} \end{cases}$$

•) Se $x_0 = -\infty$ e' pt di acc^{ne} di dom f. Se f e' def^{nte} monotona per $x \to -\infty$ (quindi $\exists\, U$ intorno di $-\infty$ t.c. f e' monotona su dom $f \cap U$). Allora:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ esiste e vale } \begin{cases} \inf_{\text{dom} f \cap U} f(x) & \text{se } f \text{ crescente} \\ \sup_{\text{dom} f \cap U} f(x) & \text{se } f \text{ decrescente} \end{cases}$$

Teorema: I due limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad e \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

1) esistono entrambi finiti
2) coincidono

Teorema sulla gerarchia degli infiniti:
Valgono i seguenti limiti:

•) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad \forall a>1, \forall \beta>0, \forall \alpha>0$

•) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad \forall a>1, \forall \alpha>0$

Asintoticità:
Siano f, g due funzioni definite su $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia x_0 un pt di acc^ne^ di X. Diremo "f e g sono asintotiche per $x\to x_0$" quando:

1) sono entrambe $\neq 0$ def^nte^ per $x\to x_0$
2) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (equivalentemente $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$)

In questo caso scriveremo "$f \sim g$ per $x\to x_0$"

o-piccolo:
Siano f, g funzioni definite su $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia x_0 pt di acc^ne^ di X. Sia $g \neq 0$ def^nte^ per $x\to x_0$. Diremo "f è un o-piccolo di g per $x\to x_0$" e scriveremo:

$f = o(g(x))$ per $x\to x_0$

quando $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Teorema sul cambio di variabile negli sviluppi:
Siano f, φ e φ_1 tre funzioni t.c. $(\varphi \circ f)$ e $(\varphi_1 \circ f)$ siano entrambe definite su $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia x_0 pt di acc^ne^ di X. Se si ha:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

2) $\varphi(y) = \varphi_1(y) + o(\varphi_1(y))$ per $y \to y_0$

3) a) $f(x) \neq y_0$ def^nte^ per $x \to x_0$

oppure

b) $\dfrac{\varphi(y_0)}{\varphi_1(y_0)} = 1$

Allora $\varphi(f(x)) = \varphi_1(f(x)) + o(\varphi_1(f(x)))$ per $x \to x_0$

Teorema di sostituzione degli infiniti e infinitesimi:
Siano f, g, f_1 e g_1 tutte definite su $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia x_0 pt di acc^ne^ di X. Siano g_1 ed f_1 entrambe def^nte^ $\neq 0$ per $x \to x_0$.
Se abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + o(f_1(x)) \\ g(x) &= g_1(x) + o(g_1(x)) \end{aligned}\right\} \text{per } x \to x_0$$

Allora $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ hanno lo stesso comportamento: o non esistono entrambi o esistono entrambi e coincidono.

O-grande:
Siano f e g due funzioni definite su X.
Sia x_0 un pt di acc^{ne} di X. Diremo che
"f è una O-grande di g per $x \to x_0$" e
scriveremo "$f = O(g)$ per $x \to x_0$" quando $\exists M > 0$
ed un intorno U di x_0 t.c.

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$$

Ordine di infinito:
Siano f e g due funzioni definite su X. Sia
x_0 pt di acc^{ne} di X. Siano f e g entrambe
infinite per $x \to x_0$. In particolare sono entrambe
$\neq 0$ def^{nte} per $x \to x_0$. Consideriamo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

- Se il limite $\exists$ e vale $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora diremo che f e g sono infiniti dello stesso ordine per $x \to x_0$
- Se il limite $\exists$ e vale $+\infty$ [0] diremo che f è un infinito di ordine superiore a g [g è un infinito di ordine superiore a f]
- Se il limite $\nexists$, diremo che f e g sono due infiniti non confrontabili

Ordine di infinitesimo:
Siano f e g definite su $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia x_0 un
pt di acc^{ne} di X. Siano f e g entrambe
infinitesime per $x \to x_0$. Consideriamo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

- Se il limite $\exists$ e vale $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, diremo che f e g sono infinitesimi dello stesso ordine

•) Se il limite esiste e vale $+\infty$ [o $-\infty$] diremo che g è un infinitesimo di ordine superiore a f [f è un infinitesimo di ordine superiore a g]

•) Se il limite $\nexists$ diremo che f e g sono infinitesimi non confrontabili;

Funzioni-campione:

Sia x_0 un pt di acc^{ne} di dom f. Sia $\alpha > 0$.

1) Se $x_0 \in \mathbb{R}$

•) Se f e $|x-x_0|^\alpha$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to x_0$ diremo che f è infinitesima di ordine α per $x \to x_0$

•) Se f e $|x-x_0|^{-\alpha}$ sono infiniti dello stesso ordine per $x \to x_0$ diremo che f è infinita di ordine α per $x \to x_0$

2) Se $x_0 = \pm\infty$

•) Se f e $|x|^{-\alpha}$ sono infinitesime dello stesso ordine per $x \to x_0$ diremo che f è infinitesima di ordine α per $x \to x$

•) Se f e $|x|^\alpha$ sono infiniti dello stesso ordine per $x \to x_0$ diremo che f è infinita di ordine α per $x \to x$

Successioni:

Una successione (a valori reali) è una funzione reale il cui dominio è $\mathbb{N}$ o almeno un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$. Le indicheremo con $\{a_n\}$

Limite di successione:

Diremo che "la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende a $l \in \mathbb{R}^*$ (per $n \to +\infty$)" quando:

$\forall\, U$ intorno di l, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ t.c.

$$a_n \in U \quad \forall n > N$$

Inoltre diremo:

- Se $l = 0$ la successione è infinitesima
- Se $l = \pm\infty$ —— " —— infinita
- Se $l \in \mathbb{R}$ —— " —— convergente
- Se $\lim a_n \nexists$ —— " —— irregolare

Successioni limitate:

$\{a_n\}$ è detta limitata quando $\exists M > 0$ t.c.

$\{a_n\} < M \quad \forall n \in \text{dominio}\{a_n\}$

Teorema unicità del limite:

Se $\lim a_n = l_1$ e $\lim a_n = l_2$ allora $l_1 = l_2$

Teorema relazione tra limite e modulo:

$$\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0$$

$$\lim a_n = l \implies \lim |a_n| = |l|$$

Teorema di permanenza del segno:
Se $\lim a_n = l \in \mathbb{R}^*$ con $l>0\,[<0]$ allora a_n è def^{nte} $>0\,[<0]$.
Viceversa, se $\lim a_n = l$ e se a_n è def^{nte} $\geq 0\,[\leq 0]$ allora $l \geq 0\,[\leq 0]$

Teorema del confronto:
Se $\lim a_n = l_a$ e $\lim b_n = l_b$ e se $a_n \leq b_n$ def^{nte} allora $l_a \leq l_b$

Teorema carabinieri caso limitato:
Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente, se $\lim a_n = \lim c_n = l \in \mathbb{R}$. Allora $\lim b_n = l$

Teorema carabinieri caso illimitato:
Se $a_n \leq b_n$ def^{nte}:
- se $\lim a_n = +\infty$, allora $\lim b_n = +\infty$
- se $\lim b_n = -\infty$, allora $\lim a_n = -\infty$

Teorema sul limite successioni monotone:
Se a_n è def^{nte} monotone, allora $\lim a_n$ esiste e vale:

$$\lim a_n = \begin{cases} \sup\{a_n : n \geq N\} & \text{se } a_n \text{ def}^{nte} \text{ crescente} \\ \inf\{a_n : n > N\} & \text{———''——— decrescente} \end{cases}$$

dove $N \in \mathbb{N}$ tale che a_n è monotone per $n > N$

Teorema sull'algebra dei limiti:

Se $\lim a_n = l_a \in \mathbb{R}$, $\lim b_n = l_b \in \mathbb{R}$ allora:

- $\lim (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha l_a + \beta l_b \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\lim a_n \cdot b_n = l_a \cdot l_b$
- $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_a}{l_b} \quad$ se $l_b \neq 0$

Teorema sulle gerarchie degli infiniti per successioni:

1) $\lim \frac{(\log_a n)^\beta}{n^\alpha} = 0 \quad \forall a > 1, \forall \beta > 0, \forall \alpha > 0$

2) $\lim \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \forall a > 1 \ \forall \alpha > 0$

3) $\lim \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 1$

4) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

Teorema sulla formula di Stirling:

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in (0, 1]$ t.c.

$$n! = \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} \exp\left\{ \frac{a_n}{12 n} \right\}$$

Teorema:

La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è:

- monotona crescente
- limitata

Allora ne deduciamo che il limite a_n esiste finito

Sottosuccessioni:

Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice "sottosuccessione" (o "successione estratta") di $\{a_n\}$ ogni successione della forma $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ dove n_k è una successione: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (cioè a valori in $\mathbb{N}$) strettamente crescente (in particolare $\lim_k n_k = +\infty$)

Teorema di Bolzano-Weierstrass:

Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente

Teorema-ponte:

Sia f una funzione. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pt di acc^ne^ del dom f. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Per ogni successione } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.c.} \\ \cdot)\ x_n \in \operatorname{dom} f \\ \cdot)\ \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \\ \cdot)\ x_n \neq x \text{ def}^{\text{nte}} \text{ per } x \to x_0 \\ \text{si ha: } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l \end{cases}$$

Serie:

Dati a_k, $k \in \mathbb{N}$, chiameremo somma parziale (o "ridotta") n-esima il numero:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = S_n$$

La successione $\{S_n\}_n$ è detta serie di termini generali a_k

Serie convergente:

Diremo che la serie di termini generali a_k è convergente quando la successione $\{S_n\}$ è convergente ad un numero $S \in \mathbb{R}$ (detto somma della serie). In altre parole diremo che la serie è convergente quando:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) = S$$

scriveremo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S$

Serie divergente:

Diremo che la serie di termini generali a_k è divergente a $+\infty$ $[-\infty]$ quando la successione $\{S_n\}$ diverge a $+\infty$ $[-\infty]$, cioè quando:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) = +\infty \; [-\infty]$$

scriveremo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty \; [-\infty]$

Serie irregolare:

Diremo che la serie è irregolare quando $\nexists \lim_{n \to +\infty} s_n$

Serie regolare:

Diremo che la serie è regolare quando è convergente o divergente

Teorema sull'algebra delle serie:

Siano $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ due serie.

I) Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è convergente con somma S_a, allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} (c \cdot a_k)$ è convergente con somma $c \cdot S_a$ $\forall c \in \mathbb{R}$

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è divergente allora $\forall c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} (c \cdot a_k)$ è anch'essa divergente

II) Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ sono entrambe convergenti, rispettivamente con somma S_a e S_b, allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k)$ è convergente con somma $\alpha \cdot S_a + \beta \cdot S_b$

Coda della serie:

La serie $\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} a_k$ è detta "coda" della serie

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

Teorema condizione necessaria per convergenza.
Sia $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ una serie convergente, allora

$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

Serie a termini positivi:
Siano $a_k \geq 0$, allora diremo che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è una serie a termini positivi.
(analogamente per quelle a termini negativi)

Teorema:
Sia $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ una serie a termini def^{nte} positivi [negativi]. Allora essa è convergente o divergente a $+\infty$ [$-\infty$]. In altre parole non può essere irregolare o divergere a $-\infty$ [$+\infty$]

Teorema criterio del confronto per le serie:
Siano $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ due serie a termini positivi t.c. $0 \leq a_k \leq b_k$ def^{nte} per $k \to +\infty$
Allora:
1) Se $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ è convergente, allora lo è anche $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$
2) Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è divergente a $+\infty$, allora lo è anche $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ (analogamente per serie a termini negativi)

Serie assolutamente convergenti:

Sia $\sum^{+\infty} a_k$ una serie. Diremo che la serie $\sum^{+\infty} a_k$ è assolutamente convergente quando la serie $\sum^{+\infty} |a_k|$ è convergente

Teorema convergenza assoluta implica convergenza semplice

Sia $\sum^{+\infty} a_k$ una serie assolutamente convergente

Allora $\sum a_k$ è anche semplicemente convergente

Teorema criterio del confronto asintotico

Siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$ due serie, entrambe a termini ≥ 0. Se $\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in \mathbb{R}^*$ (se $l \in (0, +\infty)$ equivale a $a_k \sim l b_k$)

allora:

1) se $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: le due serie hanno lo stesso comportamento

2) se $l = 0$ e se $\sum b_k$ CV $\Rightarrow \sum a_k$ CV

3) se $l = 0$ e se $\sum a_k$ DV $\Rightarrow \sum b_k$ DV

4) se $l = +\infty$ e se $\sum b_k$ DV $\Rightarrow \sum a_k$ DV

5) se $l = +\infty$ e se $\sum a_k$ CV $\Rightarrow \sum b_k$ CV

Teorema criterio del rapporto:

Sia $\sum a_k$ una serie con $a_k > 0$, allora:

1) se $\exists\, r < 1$ t.c. $\frac{a_{k+1}}{a_k} < r$ def^{nte} allora la serie è CV

2) se $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ def^{nte}, allora la serie è DV

Teorema criterio della radice:

Sia $\sum a_k$ una serie con $a_k \geq 0$, allora:

1) Se $\exists\, r<1$ t.c. $\sqrt[k]{a_k} < r$ def^{nte} allora

$\sum a_k$ CV

2) Se $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ def^{nte} allora $\sum a_k$ DV

Teorema criterio di Leibniz:

Sia $\sum^{+\infty} (-1)^k a_k$ con $a_k \geq 0$, supponiamo:

I) $\lim_k a_k = 0$

II) $\{a_k\}$ è def^{nte} decrescente

Allora:

1) la serie $\sum^{+\infty} (-1)^k a_k$ è CV

2) Se indichiamo con s la somma di $\sum^{+\infty} (-1)^k a_k$, vale: $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ $\forall n > N$ dove

s_n = somma parziale $= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$

Funzioni continue:

Sia f una funzione di dominio dom f, sia $x \in$ dom f. Diremo che f è continua in x_0 quando:

- x_0 è pt isolato del dom f
- x_0 è pt di acc^{ne} di dom f e vale $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Diremo "f è continua" quando lo è in ogni punto $x_0 \in$ dom f. Se f non è continua in x_0 diremo "f è discontinua in x_0" o equivalentemente "x_0 è pt di discontinuità di f"

Insieme delle funzioni continue:

Se $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$; indicheremo con $C^0(X)$ l'insieme delle funzioni continue su X, cioè:

$$C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ è continua su } X\}$$

Teorema sull'algebra delle funzioni continue:

Siano f e g due funzioni e definite su $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$. Sia $x_0 \in X$. Siano f e g entrambe continue in x_0. Allora:

1) $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è continua in x_0 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2) $f(x) \cdot g(x)$ ——— " ———

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ——— " ——— se $g(x_0) \neq 0$

Teorema di locale limitatezza per funzioni continue:

Se f è continua in x_0, allora f è def^{nte} limitata per $x \to x_0$

Teorema della permanenza del segno per f continue:

Se f è continua in x_0, se $f(x_0) > 0$ [< 0] allora f è def^{nte} > 0 [< 0] per $x \to x_0$

Teorema del cambio di variabile per f continue

Siano f e g due funzioni t.c. $g \circ f$ sia definita su X, sia x_0 un pt di acc^{ne} di X, se valgono

1) f continua in x_0

2) g continua in $f(x_0)$

Allora $g \circ f$ è continua in x_0

Teorema-ponte per le f continue:
Sia $x_0 \in dom f$, allora:

f è continua in $x_0 \iff \begin{cases} \forall \text{ successione } \{a_n\} \text{ con} \\ a_n \in dom f \text{ con } \lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \\ \text{si ha} \\ \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) \end{cases}$

Teorema sul cambio di variabile negli sviluppi con f continua:
Siano f, φ, φ_1 tre funzioni t.c. $\varphi \circ f$ e $\varphi_1 \circ f$ siano entrambe definite su $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$, sia x_0 un pt di acc^ne di X, se:

1) φ e φ_1 sono entrambe continue in y_0

2) $\varphi(y) = \varphi_1(y) + o(\varphi_1(y))$ per $y \to y_0$

3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$

Allora: $\varphi(f(x)) = \varphi_1(f(x)) + o(\varphi_1(f(x)))$ per $x \to x_0$

Funzioni discontinue:
Sia $x_0 \in dom f$ un pt di discontinuità di f, diremo:

- x_0 è un pt di discontinuità eliminabile quando $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste finito ed è $\neq f(x_0)$
- x_0 è un pt di discontinuità di prima specie quando esistono finiti i due limiti $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e non coincidono
- x_0 è un pt di discontinuità di seconda specie in tutti gli altri casi (cioè quando uno dei 2 limiti di prima non esiste o esiste infinito)

Infine, nel caso di discontinuità di I specie, chiameremo "salto di f in x_0" il valore:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Teorema di Weierstrass:

Sia $f \in C^0([a,b])$, allora f ammette massimo e minimo, cioè $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.

$$f(x_m) = \min_{[a,b]} f \quad , \quad f(x_M) = \max_{[a,b]} f$$

Teorema di Bolzano (o degli zeri):

Sia $f \in C^0([a,b])$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$

Allora $\exists\, c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = 0$

Teorema dei valori intermedi:

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Sia $f \in C^0(I)$. Allora:

1) $\operatorname{Im} f$ è un intervallo
2) $[\inf_I f, \sup_I f] \supseteq \operatorname{Im} f \supseteq (\inf_I f, \sup_I f)$

Teorema:

Sia $f \in C^0(I)$ con I un intervallo. Allora:

f è invertibile $\Longleftrightarrow$ f è strettamente monotona

Teorema sulla continuità delle funzioni inverse:

Sia I un intervallo. Sia $f \in C^0(I)$ invertibile.

Allora:

1) f è strettamente monotona
2) la sua inversa f^{-1} è continua sul proprio dominio cioè:

$f^{-1} \in C^0(\operatorname{dom} f^{-1})$ $(\Rightarrow f^{-1} \in C^0(\operatorname{Im} f))$

Derivata:

Sia I un intervallo, sia $x \in I$. Sia $f: I \to \mathbb{R}$
Se esiste, il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

è detto derivata di f in x_0 ed è denotato con:

$$f'(x_0),\ Df(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0)$$

Inoltre se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, diremo che f è derivabile in x_0. Diremo che f è derivabile quando lo è in ogni punto $x \in I$

Retta tangente:

Diremo che la retta $y = ax+b$ è la retta di migliore approssimazione lineare di f in x_0 (o, più brevemente, retta tangente ad f in x_0) quando:

$$f(x)-(ax+b) = o(|x-x_0|) \text{ per } x \to x_0$$

Derivata destra e sinistra:

Sia x_0 un pt di acc^{ne} destro [sinistro] di dom$f$. Se esiste, il limite:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\left[\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]$$

è detto derivata destra [sinistra] di f in x_0 ed è denotata come:

$$f'_+(x_0),\ D_+f(x_0)\ [f'_-(x_0),\ D_-f(x_0)]$$

Inoltre se questo limite è finito diremo che f è derivabile da destra [sinistra] in x_0

Punti di non derivabilità:

Sia $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in (a,b)$. Sia f continua in x_0. Allora diremo:

- "f presenta un flesso a tangente verticale" quando:

  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = +\infty$ oppure $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = -\infty$

- "f presenta un punto angoloso in x_0" quando esistono sia $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$, sono diversi e almeno una di esse è finita.

- "f presenta una cuspide in x_0" quando

  $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$

  oppure

  $f'_+(x_0) = -\infty$ e $f'_-(x_0) = +\infty$

Teorema sull'algebra delle derivate:

Siano f e g due funzioni definite su un intervallo I. Sia $x_0 \in I$, siano f e g derivabili in x_0. Allora:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la funzione $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è derivabile in x_0 con:

$$D(\alpha f(x) + \beta g(x))|_{x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

2) La funzione $f(x) \cdot g(x)$ è derivabile in x_0 con:

$$D(f(x) \cdot g(x))|_{x_0} = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

3) Se $g(x_0) \neq 0$, la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0 con:

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\Big|_{x_0} = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Teorema:

f è derivabile, allora:

- f pari $\longrightarrow$ f' dispari
- f dispari $\longrightarrow$ f' pari

Teorema sulla derivata della funzione composta

Siano f e g due funzioni. Sia $g \circ f$ definita su un intervallo I. Sia $x_0 \in I$.

Valgano:
- f derivabile in x_0
- g derivabile in $f(x_0)$

Allora valgono:
- $g(f(x))$ è derivabile in x_0
- $D[(g \circ f)(x)]_{|x=x_0} = g'(f(x_0)) f'(x_0)$

Teorema sulla derivata della funzione inversa:

Sia I un intervallo. Sia $x_0 \in I$. Sia f una funzione continua ed invertibile su I, derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$. Allora la sua funzione inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e verifica:

$$(Df^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

(dove $y_0 = f(x_0)$)

Derivata seconda:

Sia I un intervallo, sia $x_0 \in I$. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile su I. Se esiste finito il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \right)$$

diremo che f è derivabile 2 volte in x_0 e denoteremo il valore del limite con

$$f''(x_0) \quad D^2 f(x_0) \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \quad f^{(2)}(x_0)$$

Derivata n-esima:

Sia I un intervallo, sia $x_0 \in I$. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $(n-1)$ volte, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Se la sua derivata $(n-1)$-esima $f^{(n-1)}$ è derivabile in x_0, diremo che la funzione f è ~~derivabile~~ n volte in x_0 ed indicheremo $(Df^{(n-1)})(x_0)$ con:

$$f^{(n)}(x_0) \qquad D^n f(x_0) \qquad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$$

Teorema formula di Leibniz:

Siano f e g due funzioni definite sull'intervallo I. Sia $x_0 \in I$; siano f e g derivabili n volte in x_0. Allora $f(x) \cdot g(x)$ è derivabile n volte in x_0 e vale:

$$D^n(f(x) \cdot g(x))(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} f(x_0) \cdot D^k g(x_0)$$

Massimi e minimi relativi:

Sia I un intervallo; sia $f: I \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in I$.

1) Diremo che x_0 è punto di estremo relativo (o locale) per f quando $\exists\, \delta > 0$ t.c. x_0 sia un pt di estremo di f su $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap I$. In particolare diremo che x_0 è un punto di massimo [minimo] relativo quando $\exists\, \delta > 0$ t.c. x_0 è pt di massimo [minimo] di f su $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap I$.
Cioè: $f(x_0) \geq f(x)$ [$f(x_0) \leq f(x)$] $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$

2) Diremo che x_0 è pt di max [min] relativo stretto quando $\exists\ \delta > 0$ t.c.

$$f(x_0) > f(x)\ [f(x_0) < f(x)]$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap I \text{ con } x \neq x_0$$

Teorema di Fermat:
Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia x_0 un pt estremo di f su (a,b). Sia f derivabile in x_0.
Allora: $f'(x_0) = 0$

Punto stazionario:
Diremo che x_0 è un pt stazionario di f quando $f'(x_0) = 0$

Teorema di Rolle:
Sia $f \in C^0([a,b]) \cap C^1((a,b))$ o f derivabile su (a,b)
Se $f(a) = f(b)$. Allora $\exists\ c \in [a,b]$ t.c. $f'(c) = 0$

Teorema di Lagrange:
Sia $f \in C^0([a,b]) \cap C^1((a,b))$. Allora $\exists$ $c \in [a,b]$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti
Sia f una funzione definita su $[a,b]$. Allora

$$f \text{ è costante} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ f \in C^0([a,b]) \cap C^1((a,b)) \\ 2)\ f' = 0 \quad \forall x \in (a,b) \end{cases}$$

Teorema di Cauchy:

Siano $f, g \in C^0([a,b]) \cap C^1((a,b))$. Allora $\exists c \in (a,b)$ t.c.

$$[f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c)$$

In particolare, se $g(b) \neq g(a)$ e se $g' \neq 0$ su (a,b), $\exists c \in (a,b)$ t.c.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Teorema di monotonia (o test di monotonia):

Sia $f \in C^{(0)}([a,b]) \cap C^{(1)}((a,b))$, allora:

1) f è crescente [decrescente] su $[a,b] \iff f' \geq 0 \; [f' \leq 0]$ su (a,b)

2) f è strettamente crescente [decrescente] su $[a,b] \iff \begin{cases} 1) \; f' \geq 0 \; [f' \leq 0] \text{ su } (a,b) \\ 2) \; \nexists \text{ un intervallo } (c,d) \subseteq (a,b) \text{ con } f' = 0 \text{ su } (c,d) \end{cases}$

Teorema di de l'hôpital:
Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$. Siano $f, g \in C^{(1)}((a,b))$.
Valgano:
- f e g sono entrambe infinitesime per $x \to a$ ($\lim_{x \to a} f = \lim_{x \to a} g = 0$) oppure entrambe infinite per $x \to a$ ($\lim_{x \to a} f = \pm\infty$; $\lim_{x \to a} g = \pm\infty$)
- $g'(x) \neq 0$ su (a,b) (o almeno def^{nte} per $x \to a$)
- $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$

Allora abbiamo:
1) $g(x) \neq 0$ def^{nte} per $x \to a$
2) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

[analogamente per $x \to b$]

Teorema (relazione tra derivata e limite della derivata)
Sia $f \in C^0([a,b]) \wedge C^{(1)}((a,b))$. Se esiste $\lim_{x \to a} f'(x)$ allora f ha derivata destra in $x = a$ e vale $f'_+(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$

Convessità:

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ con I un intervallo. Diremo che f è convessa quando:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Concavità:

Diremo che f è concava quando $-f$ è convessa

Teorema:

Sia f derivabile su I. Allora:

1) f è convessa $\iff f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
$\forall x \in I, \forall x_0 \in I$

2) —— " —— $\iff f'$ è una funzione crescente

Teorema:

Se $f \in C^{(2)}(I)$. Allora:

f è convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Flessi:

Sia I un intervallo, sia $f: I \to \mathbb{R}$. Se f è concava [convessa] in un intorno sinistro di x_0 e se f è convessa [concava] in un intorno destro di x_0, allora diremo che f presenta un punto di flesso in x_0. Inoltre, se $f'(x_0) = 0$ [$f'(x_0) = \pm\infty$] diremo che

f presenta in x_0 un pt di flesso a tangente orizzontale [verticale]

Asintoti verticali:

Se vale $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ $\left[\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty\right]$

allora diremo che f presenta un asintoto verticale destro [sinistro] in x_0.

Quando entrambi i limiti sono infiniti, diremo che l'asintoto è bilatero

Asintoti orizzontali:

Se vale $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ $\left[\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}\right]$

allora diremo che la retta $y = l$ è asintoto orizzontale di f per $x \to +\infty$ $[-\infty]$

Asintoti obliqui:

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$. [analogamente per $\lim_{x \to -\infty} \dots$]

allora diremo che la retta $y = ax+b$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$ $[x \to -\infty]$

Teorema di caratterizzazione degli asintoti obliqui:

Sia f una funzione. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora:

$y = ax+b$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$ $\iff$ $\begin{cases} 1) \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \\ 2) \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] \end{cases}$

[Analogamente per $x \to -\infty$]

Polinomio di Taylor:

Sia f derivabile n volte in x_0. Il polinomio:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

è detto polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n e lo denotiamo

$$T_{n,x_0}[f](x)$$

Nel caso particolare $x_0=0$ si chiama Polinomio di McLaurin

Teorema di Peano (Teor. sul polinomio di Taylor con resto di Peano)

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile n volte in $x_0\in(a,b)$. Allora

1) $f(x)=T_{n,x_0}[f](x)+o(|x-x_0|^n)$ per $x\to x_0$

2) $T_{n,x_0}[f](x)$ è l'unico polinomio di grado n tale che (1))

Partizione e norma della partizione:

Sia $I=[a,b]$ un intervallo. Chiameremo partizione di I un insieme $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ con $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ con $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

(deve essere un insieme finito di punti)

Scriveremo Δx_i per indicare x_i-x_{i-1} $\forall i=1,\dots,n$

Chiameremo norma della partizione il numero $\max_{i=1,\dots,n}\Delta x_i$ e la denoteremo con $\|P\|$

Partizione puntata:
Chiamiamo partizione puntata di $[a,b]$ ogni coppia $(P;\xi)$ dove P è una partizione di $[a,b]$:

$$P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\} \text{ con } x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

e ξ è un insieme

$$\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \text{ con } \xi_1 \in [x_0, x_1]$$
$$\xi_2 \in [x_1, x_2]$$
$$\dots$$
$$\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

Somme di Riemann:
Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Sia P una partizione di I. Sia (P,ξ) una partizione puntata di I.
Definiamo:
•) Somma inferiore di Riemann, denotata $L(f,P)$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$$

•) Somma superiore di Riemann, denotata $U(f,P)$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$$

•) Somma puntata di Riemann relativa a (P,ξ), denotata con $S(f,P,\xi)$:

$$S(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f(\xi_i)$$

Funzione Riemann-integrabile:

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Diremo che f è Riemann-integrabile su $[a,b]$ quando:

$$\sup\{L(f,P) : P \text{ partizione di } [a,b]\} = $$
$$= \inf\{U(f,P) : P \text{ partizione di } [a,b]\}$$

In questo caso denotiamo con $\int_a^b f(x)dx$ il valor comune.

~~Teorema di caratterizzazione delle funzioni integrabili~~

Sia f una funzione $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, limitata. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

I) f è integrabile su $[a,b]$ nel senso della definizione prima

II) $\exists\, c \in \mathbb{R}$, $\exists$ una famiglia di partizioni $\{P_j\}$ t.c.:

$$\lim_{j\to\infty} L(f,P_j) = c = \lim_{j\to\infty} U(f,P_j)$$

I-bis) $\exists$ una famiglia di partizioni $\{P_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$\lim_{j\to\infty}(U(f,P_j) - L(f,P_j)) = 0$$

II) $\exists\, c \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. per ogni partizione puntata (P,ξ) con $\|P\| < \delta$ si ha:

$$c - \varepsilon < S(f,P,\xi) < c + \varepsilon$$

I) $\exists\, c \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists$ una partizione P t.c.

$$c - \varepsilon < L(f,P) \le U(f,P) < c + \varepsilon$$

v) $\exists ! \, c \in \mathbb{R}$ t.c.:

$$L(f,P) \leq c \leq U(f,P) \quad \forall \text{ partizione } P$$

nel caso tutti i valori c coincidono

Integrale definito:
Il valore c individuato dal teorema precedente viene indicato con $\int_a^b f(x)\,dx$ detto integrale definito di f su $[a,b]$

Teorema sulle classi di funzioni integrabili:
Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Se f verifica almeno una delle seguenti proprietà:

A) f è monotona su $[a,b]$

B) f ammette al più un numero finito di discontinuità
(cioè $f \in C^0([a,b] \setminus \{\xi_1, \dots \xi_n\})$)

allora f è integrabile su $[a,b]$

Teorema della media integrale:
Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile (e limitata).
Siano $m = \inf_{[a,b]} f \qquad M = \sup_{[a,b]} f$

Allora si ha: $\quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$

Inoltre, se $f \in C^0([a,b])$, allora $\exists \, c \in [a,b]$ t.c.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\left(\text{cioè } (b-a) f(c) = \int_a^b f(x)\,dx\right)$$

Valor medio di f:

Il valore $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ è detto valor medio di f su $[a,b]$

Teorema fondamentale del calcolo integrale:

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a,b]$. Definiamo:

$$F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$$

Se f è continua in x_0, allora F è derivabile in x_0 con $F'(x_0)=f(x_0)$

Primitiva e integrale indefinito:

Se I è un intervallo, se $f:I\to\mathbb{R}$ e se $F:I\to\mathbb{R}$ è t.c. $F'=f$, allora diremo che F è una primitiva di f. Chiameremo integrale indefinito di f l'insieme formato da tutte le sue primitive e lo denoteremo con $\int f(x)\,dx$ cioè:

$$\int f(x)\,dx=\{F:I\to\mathbb{R} : F'=f \text{ su } I\}$$

Teorema:

Se F e G sono due primitive della stessa funzione f su un intervallo I, allora $\exists\, c\in\mathbb{R}$ (una costante) t.c. $F(x)=G(x)+c \quad \forall x\in I$

(cioè F e G differiscono per una costante)

Integrale improprio:

•) Sia $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, sia $b \in \mathbb{R}$, con $a<b$.
Sia $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su ogni intervallo $[c,b]$ $\forall c \in (a,b)$.
Allora, se esiste finito il limite

$$\begin{cases} \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx & \text{se } a \in \mathbb{R} \\ \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\,dx & \text{se } a = -\infty \end{cases}$$

Diremo che f è integrabile in senso improprio su $(a,b]$ e chiameremo integrale generalizzato il valore del limite

•) (analogamente): Sia $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $b>a$, sia $f:[a,b)$ una funzione integrabile su ogni intervallo della forma $[a,d]$ $\forall d \in (a,b)$. Se esiste finito il limite:

$$\begin{cases} \lim_{d \to b^-} \int_a^d f(x)\,dx & \text{se } b \in \mathbb{R} \\ \lim_{d \to +\infty} \int_a^d f(x)\,dx & \text{se } b = +\infty \end{cases}$$

Diremo che f è integrabile in senso improprio su $[a,b)$ e chiameremo —— // ——.

•) Se questi limiti sono finiti diremo che l'integrale (generalizzato o improprio) è convergente; se sono infiniti, diremo che l'integrale è divergente

I Generalizzazione integrale improprio:
Sia $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Sia $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo $[c,d] \subseteq (a,b)$. Diremo che f è integrabile in senso improprio su (a,b) quando: fissato arbitrariamente $x_0 \in (a,b)$, f è integrabile in senso improprio su $(a,x_0]$ e separatamente su $[x_0,b)$. In questo caso scriveremo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx$$

II Generalizzazione integrale improprio:
Sia $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, sia $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, sia f una funzione definita su $(a,b) \setminus \{x_1, x_2 \dots x_n\}$
dove $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$
Diremo che f è integrabile in senso improprio su (a,b) e scriveremo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Quando f è integrabile in senso improprio su ogni intervallo (x_i, x_{i+1}) con $i = 1, \dots, n$

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$. Diremo che f è assolutamente integrabile su (a,b) quando la funzione $|f(x)|$ è integrabile su (a,b), cioè quando $\int_a^b |f(x)|$ è convergente. In questo caso diremo che $\int_a^b f(x)\,dx$ è assolutamente convergente

Teorema assoluta integrabilità implica integrabilità

Se f è assolutamente integrabile su (a,b), allora è integrabile su (a,b)

Teorema criterio del confronto:

Siano $f,g:(a,b) \to \mathbb{R}$, entrambi integrabili su $[c,d]$, $\forall$ intervallo $[c,d] \subseteq (a,b)$ t.c.

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Allora:

1) Se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ converge

2) Se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, allora $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Teorema criterio del confronto asintotico

Siano $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$. Siano f, g due funzioni definite su $(a,b]$ entrambi integrabili su ogni intervallo $[c,d] \subseteq (a,b]$ t.c.

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}^*$$

Allora:

1) Se $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: il carattere di $\int_a^b f(x)\,dx$ coincide con quello di $\int_a^b g(x)\,dx$

2) Se $l = 0$; se $\int_a^b g(x)\,dx$ CV $\to \int_a^b f(x)\,dx$ CV

3) Se $l = +\infty$; se $\int_a^b g(x)\,dx$ DV $\to \int_a^b f(x)\,dx$ DV