Sommatoria e fattoriale

1. La sommatoria

Definizione. Siano $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, n$ numeri reali. La loro somma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ può essere indicata come

$$\sum_{i=0}^{n} a_i$$

E si legge "sommatoria per i da 1 ad n di a_i". i è detto *indice di sommatoria*, ed è detto *indice muto* (non è rilevante la sua notazione).

1.1. Proprietà formali delle sommatorie

Proprietà distributiva - *prodotto per una costante:*

$$\sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Sommatoria con termine costante:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c \cdot n \text{ (numero di addendi della sommatoria)}$$

Somma di sommatorie:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

Traslazione di indici:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}$$

Riflessione di indici:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$$

1.2. Somma di una progressione geometrica

Data una progressione geometrica, con $a = 1$ primo termine e $q \neq 1$ ragione della progressione, la somma dei primi n termini di tale progressione è:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

2. Fattoriale

Definizione. Si dice fattoriale di n e si scrive $n!$, la funzione tale che:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)!\,, & se\ n > 0 \\ 0! = 1 \end{cases} \quad per\ n \in \mathbb{N}$$

Si legge n fattoriale ed è: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

2.1. Coefficiente binomiale

Il coefficiente binomiale, indicato con $c_{n,k}$ (n su k) è rappresentato come:

$$c_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad con\ 0 \leq k \leq n$$

2.2. Il binomio di Newton

La potenza n-esima di un binomio $(a+b)$ e dato da:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\ldots(a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2.3. Proprietà e relazione di Stiefel

Proprietà:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Relazione di Stiefel:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \leftrightarrow \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$