Esercizio 1. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari:

$$\dot y = \frac{(x-1)\,y}{x}\,; \quad \dot y = (1+\ln x)\,y\,; \quad \dot y + \frac{y}{2x} = 0\,; \quad \dot y = y\sqrt{x}\,; \quad \dot y = \frac{(\ln x)\,y}{x}\,;$$

$$\dot y = \frac{x\,y}{x^2-1}\,; \quad \dot y = \frac{y}{\sin x}\,; \quad \dot y = (\arcsin x)\,y\,; \quad \dot y = \frac{1-y}{x}\,; \quad \dot y + 2x\,y = x\,e^{-x^2}\,;$$

$$\dot y = \frac{1+x+2y}{x}\,; \quad \dot y + \frac{y}{x} = e^x\,; \quad \dot y = (\tan x)\,y + \cos x\,; \quad \dot y = \frac{1+y}{\sqrt{x}}\,;$$

$$\dot y = (y+1)x\,\sin x\,; \quad (1+x^2)\,\dot y + x\,y = \frac{1}{1+x^2}\,; \quad \dot y = \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2\,e^x\,.$$

Esercizio 2. Calcolare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot y = \dfrac{1-y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot y = \dfrac{2x\,y}{1+x^2} + (x+x^3)\,\sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot y = \dfrac{x+1}{x}\,y + x(1-x) \\ y(1) = e \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2\dot y + 2(\cos x)\,y = \sin(2x) \\ y(0) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot y + \dfrac{y}{x} = \sqrt[3]{x} \\ y(1) = \frac{3}{7} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot y = 2xy + e^{x^2}\,\sin x \\ y(\pi) = e^{\pi^2} \end{cases}.$$

Esercizio 3. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

$$\dot y + \frac{x}{y} = 0\,; \quad \dot y = 2x\,\cos^2 y\,; \quad \sqrt{x}\,\dot y + \sqrt{y}\,\sin(\sqrt{x}) = 0\,; \quad \dot y = e^{(x-y)}\,\cos x\,;$$

$$\dot y\,(1+e^{2x}) = y\,e^{2x}\,; \quad e^{(x+y)}\,\dot y = x\,; \quad 2x^2\,y\,\dot y = 1+y^2\,; \quad x\,\dot y = \tan y\,.$$

Esercizio 4. Calcolare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot y + 2x^2\sqrt{y} = 0 \\ y(1) = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot y\,(x^2-1) = y^2 - 1 \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} (1+x^3)\,\dot y = x^2\,y \\ y(1) = 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} e^{(x-y^2)}\,\sin x = y^2\,\dot y \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 5. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -xy + x^3 \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

Allora si ha:

$\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x^\alpha} = +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x^\alpha}$ esiste finito per ogni $\alpha \geq 2$.

$\boxed{\text{C}}$ Esiste un unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x^\alpha}$ esiste finito.

$\boxed{\text{D}}$ Esiste un unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x^\alpha} = +\infty$.

Esercizio 6. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x > 0$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = y \, \cos x + e^{\sin x} \ln x \\ y(\pi) = \pi \,. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ φ è periodica.

$\boxed{\text{B}}$ φ ha almeno uno zero.

$\boxed{\text{C}}$ φ non ha nè massimo assoluto nè minimo assoluto.

$\boxed{\text{D}}$ φ ha un asintoto obliquo.

Esercizio 7. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = 2xy - e^{x^2} \sin x \\ y(0) = -2 \,. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ φ ha in $x = 0$ un punto di minimo locale.

$\boxed{\text{B}}$ La retta di equazione $y = x - 2$ è tangente al grafico di φ nel punto $(0, -2)$.

$\boxed{\text{C}}$ $e^{-x^2} \varphi(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$.

$\boxed{\text{D}}$ φ ha massimo assoluto.

Esercizio 8. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x > -1$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x\dot{y} = -\dfrac{y}{x+1} + x\,, & x > -1 \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A φ ha un solo zero (nel suo dominio di definizione).

B φ non ha zeri.

C φ ha due zeri (nel suo dominio di definizione).

D φ ha più di due zeri (nel suo dominio di definizione).

Esercizio 9. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x > -1$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{(x-1)\,y}{x+1} + x\,, & x > -1 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Determinare l'insieme $F \doteq \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x}\varphi(x) \quad \text{esiste finito} \right\}$.

A $F =]-\infty, 0[$.

B $F = \{-1\}$.

C $F = [-1, 0[$.

D $F =]-\infty, -1]$.

Esercizio 10. Sia $x \mapsto \varphi(x; c)$, $x > 0$, $(c \in \mathbb{R})$ l'integrale generale dell'equazione

$$\dot{y} + \frac{2y}{\sqrt{x}} = \frac{x\,\cos x}{e^{4(\sqrt{x})}}\,, \qquad x > 0\,,$$

e si consideri il limite $\ell(c) \doteq \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\varphi(x;\,c)\,e^{4(\sqrt{x})}}{x^2}$. Allora si ha:

A $\ell(c) = 0$ per qualunque $c \in \mathbb{R}$.

B Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = -\infty$.

C Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 11. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x;\, \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y + y \,\tan x = 3e^{\sin x} \\ y(1) = \alpha\,. \end{cases}$$

Determinare l'insieme $I \doteq \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \varphi(x;\, \alpha) = +\infty \right\}$.

A $I = \mathbb{R}$.

B $I = \mathbb{R} \setminus \{ 3(1-e) \}$.

C $I = \emptyset$.

D $I =]\, 3(1-e),\, +\infty[$.

Esercizio 12. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x;\, \alpha)$, $x > 0$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y = \dfrac{(1-x)\,y}{x} + \tanh(\alpha\, x) \\ y(1) = 0\,, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \to +\infty} \varphi(x;\, \alpha)$. Allora si ha:

A $\ell(\alpha) = -1 \quad \forall\, \alpha < 0$.

B $\ell(\alpha) = 1 \quad \forall\, \alpha \neq 0$.

C $\ell(\alpha) = 0 \quad \forall\, \alpha \leq 0$.

D $\ell(\alpha) = +\infty \quad \forall\, \alpha > 0$.

Esercizio 13. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x\,\dot y = (1 - x\,\tan x) y + x^2\,\cos x \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

Allora si ha:

A $\pi\,\dot\varphi(\pi) = \varphi(\pi)$.

B $\pi\,\dot\varphi(\pi) = \varphi(\pi) - \pi^2$.

C $\dot\varphi(\pi) = \varphi(\pi) - \pi$.

D $\dot\varphi(\pi) = \pi^2\,\varphi(\pi)$.

Esercizio 14. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy

$$\textbf{(PC)}_{\alpha} \quad \begin{cases} y\,\dot{y} = x(4-y^2) \\ y(0) = \alpha\,. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy $(\mathrm{PC})_{\alpha}$ ammette un'unica soluzione $x \mapsto \varphi(x;\,\alpha)$, $x > 0$, e si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x;\,\alpha) = 2$.

B Per ogni $\alpha > 0$, il problema di Cauchy $(\mathrm{PC})_{\alpha}$ ammette un'unica soluzione $x \mapsto \varphi(x;\,\alpha)$, $x > 0$, e si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x;\,\alpha) = +\infty$.

C Per ogni $\alpha < 0$, il problema di Cauchy $(\mathrm{PC})_{\alpha}$ ammette un'unica soluzione $x \mapsto \varphi(x;\,\alpha)$, $x > 0$, e si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x;\,\alpha) = 0$.

D Se $\alpha = 0$, il problema di Cauchy $(\mathrm{PC})_0$ ammette due soluzioni $x \mapsto \varphi_1(x)$, $x \mapsto \varphi_2(x)$, $x > 0$, e si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x) = -4$.

Esercizio 15. Si consideri l'equazione

$$\textbf{(E)} \qquad \dot{y}\,\ln y = 2y\,\cos x\,.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A Esiste una soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ $x \in \mathbb{R}$, di (E) tale che $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \dfrac{\varphi(x)-1}{\sqrt{1+\sin x}} = 0$.

B Esiste una soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ $x \in \mathbb{R}$, di (E) tale che $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \dfrac{\varphi(x)-1}{\sqrt{1+\sin x}} = 2$.

C Esiste una soluzione illimitata di (E).

D Esiste una soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ $x \in \mathbb{R}$, di (E) che ha limite per $x \to +\infty$.

9.2 Soluzioni degli esercizi a risposta multipla

Es. 5 **B.**

Es. 6 **B.**

Es. 7 **D.**

Es. 8 **C.**

Es. 9 **D.**

Es. 10 **C.**

Es. 11 **D.**

Es. 12 **A.**

Es. 13 **B.**

Es. 14 **D.**

Es. 15 **B.**