

Teorema [Criterio Integrale]

Sia $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ (oppure $[a, +\infty[$
con $a \in \mathbb{R}$)

che verifica quanto segue:

1) f monotona decrescente (ergo f è
integrabile)
sui compatti di $[1, +\infty[$

2) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$

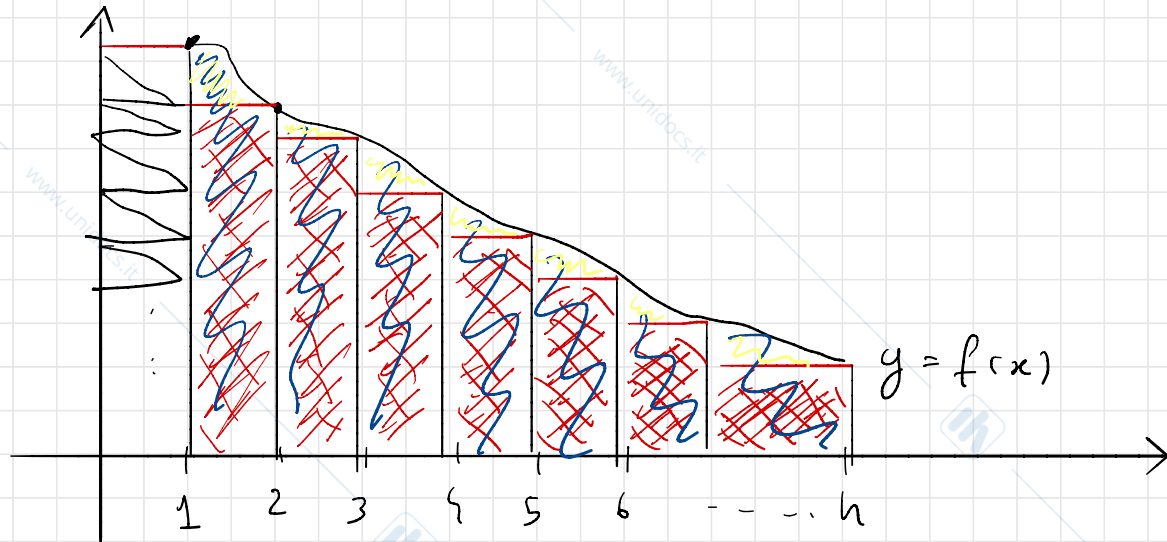
Consideriamo la serie $\sum_n f(n)$ (e^{-2} termini
 ≥ 0)

Allora $\sum_n f(n)$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx$
converge

(ne segue, visto che $f(n) \geq 0, f(x) \geq 0$)

che $\sum_n f(n)$ diverge $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge

Dim. [Criterio Integrale]



Per ragioni tecniche / estetiche, ignoriamo $f(1)$
e poniamo $\sigma_n := f(2) + f(3) + \dots + f(n)$

definiamo $I_n := \int_1^n f(x) dx$

Poniamo infine $\gamma_n := I_n - \sigma_n \quad \forall n \geq 1$

Ha tutta l'aria di essere una serie a termini ≥ 0

In fatti: $\gamma_n = I_n - \sigma_n = \int_1^n f - (f(2) + \dots + f(n)) =$

add. ter. integrale
 $\int_1^2 f + \int_2^3 f + \dots + \int_{n-1}^n f - (f(2) + f(3) + \dots + f(n)) =$

$= \sum_{k=2}^n \left(\int_{k-1}^k f(x) dx - f(k) \right) \geq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(k) dx - f(k) =$ guarda pdf

$= f(k) \cdot (k - (k-1)) - f(k) = 0$
 sono tutti termini non negativi

monotone
 congiuntamente
 decrescente di
 $f(x) \geq f(k)$ \Rightarrow integrale
 della
 monotonia
 di f $\forall x \in [k-1, k]$

Riesumiamo $f(1)$. Dalla figura sembra essere

$$0 \leq \gamma_n \leq f(1)$$

In fatti: vogliamo $\gamma_n \stackrel{?}{\leq} f(1) \Leftrightarrow I_n - \sigma_n \leq f(1)$

$$\Leftrightarrow I_n \stackrel{?}{\leq} f(1) + \sigma_n = f(1) + (f(2) + \dots + f(n))$$

In fatti:

$$I_n = \int_1^n f \stackrel{\text{abb. it.}}{=} \sum_{k=2}^n \underbrace{\int_{k-1}^k f}_{\text{decresc. di } f.} \leq \sum_{k=2}^n f(k-1) =$$

$$\leq \int_{k-1}^k f(k-1) dx$$

$$= f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \stackrel{f \geq 0}{\leq} f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + f(n)$$

come volevo

Riassumendo: $0 \leq \gamma_n \leq f(1)$ (v. th. succ. mandel e 24) $\Rightarrow \exists \gamma := \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n =$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n - \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_1^n f(x) dx - (f(2) + \dots + f(n)) \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_1^n f(x) dx - \sum_{k=2}^n f(k) \right)$$

Quindi $\int_1^n f(x) dx - \sum_{k=2}^n f(k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$

ergo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx$ converge $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n f(k)$ converge

Questo conclude la dem. perché

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx$$

$f(x) \geq 0$
 ergo $\beta \mapsto F(\beta) = \int_1^\beta f$ e' cresc.

dunque
 $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} F(\beta) =$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n)$



es. come uccidere un polinomio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{1000}}{2^n}$$

Idea: rubare qualcosa da 2^n
 per uccidere n^{1000} rimanendo
 però con serie convergenti

Tanti modi:

$$\frac{n^{1000}}{2^n} = \frac{n^{1000}}{(\sqrt{2})^n (\sqrt{2})^n} = \frac{n^{1000}}{(\sqrt{2})^n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$\downarrow n \rightarrow +\infty$
 0

$\sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ converge
 serie g. con. conv. $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \in]0, 1[$