Formula di Taylor (con resto di Lagrange)

Lemma [di tipo Rolle di ordine $n+1$]

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo)

sia $n \in \mathbb{N}$, e supponiamo che f sia derivabile $n+1$ volte su tutto I.

Siano $a, b \in I$ con:
- $0 = f(a) = f'(a) = f''(a) = [\dots] = f^{(n)}(a)$

(in tal caso si dice che a è uno zero di ordine n per f)

- e $0 = f(b)$

[per $n=0$ si ha un caso part. di Rolle]

Allora esiste $c \in]a, b[\setminus \{a, b\}$ tale che:

$$f^{(n+1)}(c) = 0$$

Dim. certo per iniziare

$$\begin{cases} f(a)=0 \\ f(b)=0 \end{cases}, \quad f \text{ derivabile su } I$$

$$\underset{\left(\substack{\text{ROLLE} \\ \text{su } f}\right)}{\Rightarrow} \exists c_1 \in [\![a,b]\!] \setminus \{a,b\} \text{ tale che } f'(c_1)=0$$

Ma allora

$$\begin{cases} f'(a)=0 \\ f'(c_1)=0 \end{cases}, \quad f' \text{ derivabile su } I$$

$$\underset{\left(\substack{\text{ROLLE} \\ \text{su } f'}\right)}{\Rightarrow} \exists c_2 \in [\![a,c_1]\!] \setminus \{a,c_1\} \text{ tale che } f''(c_2)=0$$

$\vdots$

$$\exists c_{n+1} \in [\![a,c_n]\!] \setminus \{a,c_n\} \text{ t.c. } f^{(n+1)}(c_{n+1})=0$$

Teorema [Taylor con resto di Lagrange]

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$n \in \mathbb{N}$, supponiamo f derivabile $n+1$ volte su tutto I.

Per ogni $a, b \in I$, $\exists c \in [\![a, b]\!] \setminus \{a, b\}$

tale che $f(b) = \underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}}_{=: P^f_{n,a}(b)} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Dim. Per brevità $p(x) := P^f_{n,a}(x)$

Poniamo

$$F(x) := f(x) - p(x) - \frac{f(b) - p(b)}{(b-a)^{n+1}} \cdot (x-a)^{n+1}$$

$F: I \to \mathbb{R}$

Dico che F verifica il Lemma di Rolle di ordine $n+1$, ossia

- F deriv. $n+1$ volte (vero! poiché ciò è vero per f)
- $F(b) = 0$ vero
- $0 = F^{(k)}(a)$ $\forall k = 0, 1, \dots, n$

voglio $0 = \left(\frac{d}{dx}\right)^k F(x)\Big|_{x=a} = \left(\frac{d}{dx}\right)^k\Big|_{x=a} \left(f(x) - p(x) - \frac{f(b) - p(b)}{(b-a)^{n+1}} \cdot (x-a)^{n+1} \right) =$

$$= f^{(k)}(a) - p^{(k)}(a) - 0 = 0$$

$(k \leq n < n+1)$

$f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a)$ $\forall k \leq n$ vero per la prop. caratterizzante di $p(x) = P_{n,a}(x)$

$\Rightarrow$ Posso applicare il lemma precedente

$\exists c \in [[a, b]] \setminus \{a, b\}$ t.c. $F^{(n+1)}(c) = 0$ ossia:

$$0 = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\Bigg|_{x=c} \left(f(x) - p(x) + - \frac{f(b)-p(b)}{(b-a)^{n+1}} \cdot (x-a)^{n+1} \right) = f^{(n+1)}(c) - 0 - \frac{f(b)-p(b)}{(b-a)^{n+1}} \cdot (n+1)!$$

$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(c) = \frac{f(b)-p(b)}{(b-a)^{n+1}} (n+1)!$$

$$\Leftrightarrow p(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} = f(b)$$ che é la tesi

$\square$