Lezione 24/9

Calcolo dei limiti

Funzioni continue

Una volta data la nozione di limite possiamo dare la definizione di continuità di una funzione in un punto:

- Data una funzione di due variabili $F : D \to \mathbb{R}$

e un punto $(x_0, y_0) \in D$ che è punto di accumulazione di D diremo che F è continua in (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = F(x_0,y_0)$$

Funzioni continue in D

Diremo che $F : D \to \mathbb{R}$ è continua in D se è continua in ogni punto di accumulazione di D.

Esercizio difficile

- Dimostrare che la funzione $F : R^2 \rightarrow R$ definita ponendo F(x,y)=x è una funzione continua.
- Dimostrare che la funzione $F : R^2 \rightarrow R$ definita ponendo F(x,y)=y è una funzione continua.

Aperti e chiusi

- Un sottoinsieme di R^2 si dice aperto se tutti i suoi punti sono interni.
- Un sottoinsieme di R^2 si dice chiuso se contiene tutti i suoi punti di frontiera.
- Attenzione: non è vero che se D non è aperto allora è chiuso. Ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi.
- La chiusura di un insieme D è l'insieme D unito con tutti i suoi punti di frontiera.

Esempi

- $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ è aperto.
- $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq 1\}$ è chiuso.
- $D=\{(x,y) \mid 0<x^2+y^2\leq 1\}$ non è né aperto né chiuso.

Insiemi limitati

- Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ si dice limitato se esiste un disco $N_R((0,0))$ che lo contiene.

Insiemi connessi e convessi

- Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ si dice connesso se per ogni coppia di punti P_1 , P_2 in D esiste una curva continua che li congiunge il cui sostegno è contenuto in D.
- Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ si dice convesso se per ogni coppia di punti P_1 , P_2 in D il segmento che li congiunge è contenuto in D.

Algebra dei limiti

Il limite rispetta le operazioni algebriche: se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)=L$ e $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x,y)=M$ allora

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)\pm G(x,y)=L\pm M$
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)G(x,y)=LM$
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)\big/G(x,y)=L\big/M \quad \text{purchè} \quad M\neq 0$

Operazioni algebriche e funzioni continue

Dal fatto che il limite rispetta le operazioni algebriche discende immediatamente che

- La somma e la differenza di funzioni continue è continua
- Il prodotto di funzioni continue è continuo.
- Se $G(x_0, y_0) \neq 0$ allora F(x,y)/G(x,y) è continua in (x_0,y_0).

Esempi

- $F: R^2 \to R$, $F(x, y) = x + y$ è continua.
- $F: R^2 \to R$, $F(x, y) = (x + y)(x - y)$ è continua.
- Se $D = \{(x, y) \mid x + y \neq 0\}$ e $F: D \to R$ è definita ponendo

$$F(x, y) = \frac{xy}{x + y}$$

allora F è continua.

Composizione con una funzione continua.

- Teorema: Se $f: I \to R$ è una funzione continua in $L \in I$ e

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = L$$

allora

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(F(x,y)) = f(L)$$

ovvero

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(F(x,y)) = f(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y))$$

Esempi

Calcolare

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+x^2+y^2)$$
2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-(x^2+y^2)}$$
3. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$$

Composizione di funzioni continue

Dal teorema discende immediatamente il seguente fatto: se D è un sottoinsieme di R^2

e $F : D \rightarrow I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue allora

$$f \circ F : D \rightarrow \mathbb{R}$$

è continua.

Esempio

- La funzione $F : R^2 \to R$ definita ponendo

$$F(x, y) = \cos(x^2 + e^{y^2})$$

è continua.

Forme indeterminate

Per calcolare il limite di forme indeterminate è utile restringere la funzione a curve che avvicinano il punto in cui si vuole calcolare il limite. Vale, infatti, il seguente teorema.

Teorema: Sia $F: D \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili, sia (x_0,y_0) un punto di accumulazione di D, e sia $r: I \to D \setminus \{(x_0, y_0)\}$, $r(t)=(x(t),y(t))$, una curva tale che

$$\lim_{t \to t_0} y(t)=y_0 \qquad \lim_{t \to t_0} x(t)=x_0$$

Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)=L$ allora $\displaystyle\lim_{t \to t_0} F(x(t),y(t))=L$

Restrizione a curve

- Il teorema pone una condizione piuttosto forte sull'esistenza del limite di una funzione di due variabili. Esso dice infatti che se il limite di F(x,y) per (x,y) che tende a (x_0,y_0) è L allora il limite della funzione ristretta ad una **qualsiasi** curva che si avvicina a (x_0,y_0) deve essere L e quindi non dipende dalla curva.

Esempio

- Verifichiamo se esiste il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Per farlo restringiamo la funzione alle curve

$r:(0,1)\to R^2 \qquad r(t)=(t,0) \qquad r_1:(0,1)\to R^2 \qquad r_1(t)=(t,t)$

Entrambe le curve tendono a (0,0) per $t\to 0^+$

Calcoliamo i limiti $\lim_{t\to 0^+} F(t,0)=0 \qquad \lim_{t\to 0^+} F(t,t)=\frac{1}{2}$

Siccome i due limiti sono diversi il limite

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ non esiste

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Parametrizzazione di segmenti

- Come abbiamo visto nell'esempio precedente, per verificare se il limite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)$ esiste, è utile studiare la funzione su segmenti che hanno (x_0,y_0) come estremo.

Questi segmenti si parametrizzano come

$$r_\theta : [0,a] \to R^2 \qquad r_\theta(t) = (x_0 + t\cos\theta \,,\, y_0 + t\sin\theta)$$

dove θ è l'angolo che il segmento forma con l'asse x

Test delle rette

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)$ esiste allora deve essere lo stesso su ogni curva e in particolare su ogni segmento. Otteniamo in questo modo il seguente test di non esistenza del limite.

- Sia $F: D \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Se $\lim_{t\to 0^+} F(r_\theta(t))$ dipende da θ, allora

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)$$

non esiste.