Analisi Matematica 2
X esercitazione

1. Cambio di variabili

1. PROBLEMA Calcolare i seguenti integrali tripli;

(1) $\iiint_D x dxdydz$, D il dominio delimitato dalle sfere di equazione $x^2+y^2+z^2=1$ e $x^2+y^2+z^2=4$. [Risposta: $\frac{15}{16}\pi$].

(2) $\iiint xye^z dxdydz$, $D = \{(x,y,z) \mid x > 0, x^2+y^2 \leq 1, x^2+y^2 \leq 2y, 0 \leq z \leq 1\}$.

(3) $\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dxdydz$, $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq \frac{1}{2}\}$. [Risposta: $\frac{\pi}{4}(1-\ln 2)$].

2. PROBLEMA Determinare il volume del dominio $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2-z \leq 0, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$. [Risposta: $\frac{\pi}{8}$].

2. Applicazioni fisiche

3. PROBLEMA Calcolare il momento di inerzia di una sfera piena omogenea intorno ad un suo asse di simmetria.

4. PROBLEMA Calcolare massa totale e baricentro di un cilindro retto con base di raggio 1 e altezza 1 con densità $\rho(P) = (d(P,r))^2$, dove r è l'asse di simmetria del cilindro.

3. Calcolo dei coefficienti di Fourier

5. PROBLEMA Calcolare la serie di Fourier delle seguenti funzioni periodiche

(1) $f(x) = 4 - 2\sin x + 3\cos x$. Periodo 2π.

(2) $f(x) = \cos^3(x) - \sin^3(x)$. Periodo 2π.

(3) $f(x) = 4 - 2\sin(2x) + \cos(4x)$. Periodo π.

6. PROBLEMA Sia $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x) = x^2$. Calcolare la serie di Fourier del suo prolungamento periodico.

7. PROBLEMA Sia $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x) = x^2$. Calcolare la serie di Fourier del suo prolungamento periodico.

8. PROBLEMA Calcolare la serie di Fourier delle seguenti funzioni

(1) Il prolungamento periodico di $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = sgn(x)$.
(2) Il prolungamento periodico di $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

(3) Il prolungamento periodico di $f : [-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = sgn(x)$.
(4) Il prolungamento periodico della funzione $f(x)$ pari definita su $[-1, 1)$ tale che su $[0, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 1/2 \\ -1 & x < 1/2 \end{cases}.$$

9. PROBLEMA Sia f la funzione su $[0, \pi)$ definita ponendo$f(x) = x$. Calcolare la serie di Fourier del suo prolungamento periodico.

10. PROBLEMA

(1) Sia f la funzione su $[-1, 1)$ definita ponendo $f(x) = |x|$. Calcolare la serie di Fourier del suo prolungamento periodico.
(2) Sia f la funzione pari su $[-1, 1)$ tale che $f(x) = 2 - x$ su $[0, 1)$. Calcolare la serie di Fourier del suo prolungamento periodico.