Lezione 13/12

Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Disuguaglianza di Bessel

- Se W è un sottospazio di uno spazio V allora

$$0 \leq \|v - p_W(v)\|^2 = \langle v - p_W(v), v - p_W(v) \rangle$$

e quindi $$= \langle v - p_W(v), v \rangle = \|v\|^2 - \langle p_W(v), v \rangle$$

Esplicitando $\|v\|^2 \geq \langle v, p_W(v) \rangle$ e sostituendo

$$p_W(v) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\langle v, w_h \rangle}{\|w_h\|^2} w_h$$

troviamo che

$$\|v\|^2 \geq \sum_{h=1}^{n} \frac{\left(\langle v, w_i \rangle\right)^2}{\|w_i\|^2}$$

Disuguaglianza di Bessel

- Applicando la disuguaglianza a f e $p_n(x)$ troviamo che

$$\|f\|^2 \geq \frac{(\langle f,1\rangle)^2}{T} + \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\left(\langle f,\cos(\frac{2\pi}{T}hx)\rangle\right)^2}{T/2} + \frac{\left(\langle f,\sin(\frac{2\pi}{T}hx)\rangle\right)^2}{T/2}\right)$$

- Sostituendo i coefficienti di Fourier si trova

$$\int_0^T f(x)^2 dx \geq \frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{h=1}^{n}\left(a_h^2 + b_h^2\right)\right)$$

che è detta disuguaglianza di Bessel.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Osservazione

- Si noti che la disuguaglianza di Bessel

$$\int_0^T f(x)^2 dx \geq \frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{h=1}^{n}\left(a_h^2+b_h^2\right)\right)$$

implica che la serie $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{h=1}^{+\infty}\left(a_h^2+b_h^2\right)$ converge.

Non tutte le serie trigonometriche sono serie di Fourier

- Esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(nx)$$

non è una serie di Fourier

Uguaglianza di Parseval

- Come abbiamo già visto, se $f \in L^2(T)$, la serie di Fourier di f converge a f in media quadratica, cioè

$$\lim_{n \to +\infty} \| f - p_n(f) \| = 0$$

ovvero

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T \left(f(x) - p_n(f)(x) \right)^2 dx = 0$$

Uguaglianza di Parseval

- Abbiamo già visto che

$$\|f-p_n\|^2=\|f\|^2-\frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{h=1}^{n}\left(a_h^2+b_h^2\right)\right)$$

- Siccome $\lim_{n\to+\infty}\|f-p_n\|=0$

$$\|f\|^2=\int_0^T f(x)^2\,dx=\frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{h=1}^{+\infty}\left(a_h^2+b_h^2\right)\right)$$

Questa uguaglianza è detta uguaglianza di Parseval.

Energia di un segnale

- Se una funzione f(t), periodica di periodo T, rappresenta la variazione nel tempo dell'altezza di un segnale la sua energia è data da

$$E(f)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt$$

Energia delle armoniche che compongono un segnale

- Se calcoliamo l'energia dell'armonica n-esima di f troviamo che essa è

$$E_n = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

se $n \neq 0$, mentre l'energia dell'armonica zero è

$$E_0 = \frac{a_0^2}{4} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right)^2$$

Interpretazione fisica dell'uguaglianza di Parseval

- L'uguaglianza di Parseval

$$\|f\|^2=\int_0^T f(x)^2\,dx=\frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{h=1}^{+\infty}\left(a_h^2+b_h^2\right)\right)$$

è equivalente all'equazione $E(f)=\sum_{n=0}^{+\infty} E_n$

che esprime il fatto che l'energia del segnale è la somma delle energie delle armoniche che lo compongono.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Teorema di Riemann-Lebesgue

- Corollario: Se $f \in L^2(T)$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = 0$$

Dimostrazione: La serie $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{h=1}^{+\infty}\left(a_h^2 + b_h^2\right)$ converge e quindi il suo termine generico tende a zero.

Quindi $0 \leq \lim_{n \to +\infty} |a_n| \leq \lim_{n \to +\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0$ e

$$0 \leq \lim_{n \to +\infty} |b_n| \leq \lim_{n \to +\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0$$

Forme diverse della serie di Fourier

- Ci due altri modi per scrivere la serie di Fourier di una funzione.
  - Come serie di soli coseni
  - Come serie trigonometrica complessa

Serie di soli coseni

- Consideriamo il termine

$$a_h \cos(\frac{2\pi}{T} hx) + b_h \sin(\frac{2\pi}{T} hx)$$

Scriviamo (a_h, b_h) come $\sqrt{a_h^2 + b_h^2}(\cos(\phi_h), \sin(\phi_h))$

- Sostituendo troviamo

$$a_h \cos(\frac{2\pi}{T} hx) + b_h \sin(\frac{2\pi}{T} hx) =$$

$$= \sqrt{a_h^2 + b_h^2}\left(\cos(\phi_h)\cos(\frac{2\pi}{T} hx) + \sin(\phi_h)\sin(\frac{2\pi}{T} hx)\right)$$

$$= \sqrt{a_h^2 + b_h^2}\left(\cos(\frac{2\pi}{T} hx - \phi_h)\right)$$

Serie di soli coseni

- Se chiamiamo $A_h=\sqrt{a_h^2+b_h^2}$ per $h\neq 0$ e $A_0=\frac{a_0}{2}, \phi_0=0$ allora la serie di Fourier di f si

può riscrivere come

$$S[f]=\sum_{h=0}^{+\infty} A_h\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}hx-\phi_h\right)\right)$$

Spettro di ampiezza e spettro di fase

- Se $S[f] = \sum_{h=0}^{+\infty} A_h \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} hx - \phi_h \right) \right)$

allora la successione $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_h, \cdots,$ è chiamata spettro di ampiezza di f

- La successione $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_h, \cdots,$ è chiamata spettro di fase di f.

Funzioni periodiche complesse

- Consideriamo l'insieme $L^2(T,\mathbb{C})$ formato dalle funzioni periodiche di periodo T a valori complessi tali che

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx$$

esiste finito.

- Come nel caso di $L^2(T)$ si verifica che $L^2(T,\mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale.
- Il prodotto scalare che si definisce su $L^2(T,\mathbb{C})$ è

$$\langle f,g\rangle=\int_0^T f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Ortogonalità delle funzioni esponenziali

- Abbiamo già visto che se h, k sono interi allora

$$\langle e^{(2\pi/T)ihx}, e^{(2\pi/T)ikx}\rangle = \int_0^T e^{(2\pi/T)i(h-k)x}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ T & \text{se } h = k \end{cases}$$

- Quindi le funzioni $e^{(2\pi/T)ihx}$ sono ortogonali in $L^2(T, \mathbb{C})$ e

$$\|e^{(2\pi/T)ihx}\|^2 = T$$

Polinomi trigonometrici complessi

- I polinomi trigonometrici in $L^2(T, \mathbb{C})$ di ordine n sono le funzioni del tipo

$$\sum_{h=-n}^{n} c_h e^{(2\pi/T)ihx}$$

- Applicando il principio di ortogonalità troviamo che, data f in $L^2(T, \mathbb{C})$, il polinomio trigonometrico di ordine n che minimizza lo scarto quadratico medio è

$$p_n(x)=\sum_{h=-n}^{n} \hat{f}(h) e^{(2\pi/T)ihx}$$

dove

$$\hat{f}(h)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-(2\pi/T)ihx} dx$$

Serie di Fourier per una funzione a valori complessi

- Se f è una funzione in $L^2(T, \mathbb{C})$, la sua serie di Fourier è

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(h) e^{(2\pi/T) i h x}$$

- Se f è a valori reali (cioè $f \in L^2(T)$), allora la serie

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(h) e^{(2\pi/T) i h x}$$

viene chiamata forma esponenziale della serie di Fourier di f.

Passaggio da serie di Fourier a forma esponenziale

- Valgono le seguenti relazioni: se h>0

! $$\hat{f}(h)=\frac{1}{2}(a_h-i\,b_h)$$

! $$\hat{f}(-h)=\frac{1}{2}(a_h+i\,b_h)$$

mentre

! $$\hat{f}(0)=\frac{a_0}{2}$$

Convergenza di serie di funzioni

- Come abbiamo visto vi sono vari tipi di convergenza di serie di funzioni: quando scriviamo

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

intendiamo dire che per ogni x abbiamo che la successione delle ridotte parziali converge a f(x): la serie converge puntualmente a f(x).

Convergenza di serie di funzioni

- Quando invece scriviamo

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{+\infty} \left(a_h \cos(hx) + b_h \sin(hx) \right)$$

intendiamo dire che la successione delle ridotte parziali converge a f in media quadratica.

Convergenza assoluta

- Si dice che una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge assolutamente se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$$

converge puntualmente.

Per il criterio di Cauchy, se una serie converge assolutamente, allora converge puntualmente.

Esempio

- Le serie di potenze convergono assolutamente all'interno del raggio di convergenza:
- Teorema: Se R è il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

e r<R allora la serie converge assolutamente in $[x_0-r, x_0+r]$. In particolare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Convergenza totale

- C'è un terzo tipo di convergenza di serie di funzioni, detta convergenza totale: date $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ diremo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

converge totalmente se

- ! $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni x in [a,b]
- ! $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

Convergenza puntuale e convergenza totale

- Teorema: Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente allora
  - La serie converge puntualmente ad una funzione f(x) definita su [a,b].
  - La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente e

$$|f(x)| \leq \sum |f_n(x)| \leq \sum a_n$$

  - Se le f_n sono continue allora f è continua

Derivabilità e integrazione

- Inoltre,
  - Se le f_n sono integrabili e continue allora f è integrabile e
  $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)\right) dx = \sum \int_a^b f_n(x)\,dx$$
  - Se le f_n sono derivabili e $\sum f'_n$ converge totalmente allora f è derivabile e
  $$f'(x) = \left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f'_n(x)$$