Lezione 15/10

Sviluppi di Taylor

Calcolo di g''(0)

- Per calcolare g''(0) dobbiamo prima calcolare g'(t): siccome $g(t)=F(P_0+tv)$ e F è differenziabile, possiamo usare la formula di derivazione di funzione composta (Caso II) e troviamo

$$g'(t)=\frac{\partial F}{\partial x}(P_0+tv)h+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0+tv)k$$

quindi

$$g''(0)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0+tv)\right)_{|t=0}h+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(P_0+tv)\right)_{|t=0}k$$

Calcolo g''(0)

- Osserviamo che $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0+tv)\right)_{|t=0} = D_v \frac{\partial F}{\partial x}(P_0)$

 e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(P_0+tv)\right)_{|t=0} = D_v \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)$$

- Siccome F è di classe C^2 allora $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ sono differenziabili quindi possiamo applicare la formula del gradiente e troviamo $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0+tv)\right)_{|t=0} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)h + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(P_0)k$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(P_0+tv)\right)_{|t=0} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(P_0)h + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)k$$

Calcolo g''(0)

- Sostituendo si trova

$$g''(0)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)h^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(P_0)hk+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(P_0)hk+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)k^2$$

- Siccome F è di classe C^2 , possiamo applicare il teorema di Schwarz e troviamo

$$g''(0)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)h^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(P_0)hk+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)k^2$$

Sviluppo di Taylor con resto di Peano

- Sostituendo tutto nello sviluppo di Taylor

$$g(t)=g(0)+g'(0)t+\frac{1}{2}g''(0)t^2+o(t^2)$$

troviamo

$$F(P_0+tv)=F(P_0)+t\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)h+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)k\right)$$
$$+\frac{1}{2}t^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)h^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(P_0)hk+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)k^2\right)+o(t^2)$$

Questo è lo sviluppo di Taylor di F(x,y) di ordine 2 in P_0 con resto di Peano.

Matrice Hessiana

- La forma quadratica

$$Q(h,k)=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)h^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(P_0)hk+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)k^2\right)$$

ha come matrice

$$H(P_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(P_0) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(P_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0) \end{pmatrix}$$

ed è detta matrice Hessiana di F in P_0

Sviluppo di Taylor con resto di Peano: versione semplificata

- Se riscriviamo $\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)h+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)k$ come $\nabla F(P_0)\cdot v$ allora possiamo riscrivere la formula di Taylor come

$$F(P_0+tv)=F(P_0)+t\left(\nabla F(P_0)\cdot v\right)+\frac{1}{2}t^2\left(v\,H(P_0)^t\,v\right)+o(t^2)$$

- Qui abbiamo usato il fatto che se H è la matrice della forma quadratica Q allora

$$Q(h,k)=(h,k)H\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$$

Sviluppo di Taylor con i differenziali

- Se poniamo $dx = th,\ \ dy = tk$ e $d\boldsymbol{x} = (dx, dy)$ allora, siccome v=(h,k) è un versore,

$$t^2 = t^2(h^2 + k^2) = (th)^2 + (tk)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \|d\boldsymbol{x}\|^2$$

e quindi lo sviluppo di Taylor diventa

$$F(P_0 + d\boldsymbol{x}) = F(P_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\,dy\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(P_0)\,dx\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)\,dy^2\right) + o(\|d\boldsymbol{x}\|^2)$$

Differenziale e differenziale secondo

- L'espressione $\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\,dy$

  è detta differenziale della funzione F in P_0 e si indica con $dF(P_0)$
- L'espressione

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)\,dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(P_0)\,dx\,dy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)\,dy^2$$

  è detta differenziale secondo di F in P_0 e si indica con $d^2F(P_0)$

Sviluppo di Taylor e differenziale secondo

- In termini del differenziale e del differenziale secondo lo sviluppo di Taylor

$$F(P_0+d\,\boldsymbol{x})=F(P_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\,dy\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)\,dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(P_0)\,dx\,dy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)\,dy^2\right)+o(\|d\,\boldsymbol{x}\|^2)$$

si scrive come

$$F(P_0+d\,\boldsymbol{x})=F(P_0)+dF(P_0)+\frac{1}{2}d^2F(P_0)+o(\|d\,\boldsymbol{x}\|^2)$$

Esercizio

- Calcolare la matrice hessiana e il differenziale secondo di

$$F(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$$

in (1,1).

Sviluppo di Taylor con resto di Lagrange

- Calcoliamo ora lo sviluppo di Taylor di $g(t)=F(P_0+tv)$ al primo ordine con resto di Lagrange.
- Questa volta però v non è un versore ma $v=P-P_0$ dove P è un punto del dominio di F tale che il segmento che congiunge P a P_0 è contenuto in D.

Il segmento che congiunge P a P_0

- Il segmento che congiunge P a P_0 è precisamente il sostegno della curva

$$\boldsymbol{r}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$$

definita ponendo

$$\boldsymbol{r}(t)=P_0+t(P-P_0)=P_0+tv$$

quindi per la nostra ipotesi che il segmento è tutto contenuto nel dominio di F abbiamo che la funzione $g(t)=F(P_0+tv)$ è definita in [0,1].

Sviluppo con resto di Lagrange di g(t)

- Lo sviluppo di Taylor al primo ordine in t=0 con resto di Lagrange di g(t) è

$$g(t)=g(0)+g'(0)t+\frac{1}{2}g''(z)t^2$$

con z un punto di [0,t].

- In particolare per t=1 troviamo che

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2}g''(z)$$

con z un punto di [0,1].

Sviluppo di g(t) in termini di F(x,y) e le sue derivate

- Osserviamo che
  - $g(1)=F(P_0+P-P_0)=F(P)$
  - per la formula di derivazione di funzione composta (II caso) se chiamiamo $P_z=P_0+zv$, lo stesso calcolo fatto per lo sviluppo con resto di Peano dà

$$g'(0)=\nabla F(P_0)\cdot(P-P_0)$$

$$g''(z)=(P-P_0)H(P_z)^t(P-P_0)$$

Sviluppo di Taylor con resto di Lagrange di F

- Sostituendo nella formula

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2}g''(z)$$

troviamo

$$F(P)=F(P_0)+\nabla F(P_0)\cdot(P-P_0)+\frac{1}{2}(P-P_0)H(P_z)(P-P_0)^T$$

- Questa formula è detta sviluppo di Taylor di F al primo ordine in P_0 con resto di Lagrange.

Formula esplicita dello sviluppo di Taylor

- Se $P_0=(x_0,y_0)$, $P=(x,y)$, sostituendo ed esplicitando la formula dello sviluppo di Taylor con resto di Lagrange troviamo

$$F(P)=F(P_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y-y_0)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_z)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(P_z)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_z)(y-y_0)^2\right)$$

Approssimazione lineare e resto di Lagrange

- Il resto di Lagrange è utile per valutare l'errore che si compie se si approssima una funzione con la sua approssimazione lineare infatti, se L(x,y) è l'approssimazione lineare di F in (x_0,y_0), allora

$$F(x,y)-L(x,y)=F(x,y)-F(x_0,y_0)-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

e quindi $|F(x,y)-L(x,y)|=\frac{1}{2}|(x-x_0,y-y_0)H(P_z)\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}|$

Resto di Lagrange e approssimazione lineare

- In generale, se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e v=(h,k) è un vettore allora

$$|vA^t v| \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\,\|v\|^2$$

- Se indichiamo con $\|A\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$, otteniamo che

$$|vA^t v| \leq \|A\|\,\|v\|^2$$

Resto di Lagrange e approssimazione lineare

- Applicando questa formula al resto di Lagrange troviamo che

$$|F(x,y)-L(x,y)|\leq\frac{1}{2}\|H(z)\|\|(x-x_0,y-y_0)\|^2$$

Se troviamo che in un intorno $N_r(x_0,y_0)$ abbiamo che $\|H(z)\|\leq C$ allora per ogni punto (x,y) dell'intorno

$$|F(x,y)-L(x,y)|\leq\frac{C}{2}\|(x-x_0,y-y_0)\|^2\leq\frac{C}{2}r^2$$

Esempio

- Consideriamo la funzione $F: R^2 \to R$ definita ponendo $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Calcolare una stima uniforme dell'errore che si compie calcolando F(x,y) usando la sua approssimazione lineare nell'intorno $N_{0.1}((1,1))$

Massimi e minimi per funzioni di due variabili

- Un punto (x_0,y_0) nel dominio D di una funzione di due variabili F è detto punto di massimo (minimo) relativo se esiste un intorno N di (x_0,y_0) tale che per ogni punto (x,y) in $N \cap D$ si ha che

$$F(x,y) \leq F(x_0,y_0) \qquad (F(x,y) \geq F(x_0,y_0))$$

Massimo assoluto

- Se $F: D \to B$ è una funzione di due variabili allora il massimo assoluto di F in D è il **valore** massimo della funzione in D. Quindi il massimo della funzione F è un numero M tale che:

  1) esiste un punto (x_0,y_0) in D tale che $F(x_0,y_0)=M$

  2) $F(x,y) \leq M$ per ogni (x,y) in D

Ogni punto (x_0,y_0) tale che $F(x_0,y_0)=M$ è detto **punto** di massimo assoluto. I punti di massimo assoluto sono ovviamente punti di massimo relativo.

Massimo assoluto

- Se $F: D \rightarrow B$ è una funzione di due variabili allora il massimo assoluto di F in D è il **valore** massimo della funzione in D. Quindi il massimo della funzione F è un numero M tale che:

  1) esiste un punto (x_0,y_0) in D tale che $F(x_0,y_0)=M$

  2) $F(x,y) \leq M$ per ogni (x,y) in D

Ogni punto (x_0,y_0) tale che $F(x_0,y_0)=M$ è detto **punto** di massimo assoluto. I punti di massimo assoluto sono ovviamente punti di massimo relativo.

Minimo assoluto

- Se $F : D \to B$ è una funzione di due variabili allora il minimo assoluto di F in D è il **valore** minimo della funzione in D. Quindi il minimo della funzione F è un numero m tale che:

  1) esiste un punto (x_0,y_0) in D tale che $F(x_0,y_0)=m$

  2) $F(x,y) \geq m$ per ogni (x,y) in D

Ogni punto (x_0,y_0) tale che $F(x_0,y_0)=m$ è detto **punto** di minimo assoluto. I punti di minimo assoluto sono ovviamente punti di minimo relativo.