

Lezione 3/12

Successioni di funzioni

Successioni di funzioni

- Una successione di funzioni è una sequenza

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

i cui termini sono funzioni $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ definite sul dominio $I \subset \mathbb{R}$ indipendente da i .

Esempi

- La successione $f_n(x) = x^n$ è la sequenza

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$$

In questo caso $I = \mathbb{R}$

- La successione $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \geq 1$) è la sequenza

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots, \frac{1}{x^n}, \dots$$

In questo caso $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Limite puntuale di successioni di funzioni

- Si dice che il limite puntuale della successione di funzioni $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ con $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se per ogni $x \in I$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

- In simboli si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

Successioni di funzioni complesse

- Una successione di funzioni complesse è una sequenza

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

i cui termini sono funzioni $f_i: D \rightarrow \mathbb{C}$ definite sul dominio $D \subset \mathbb{C}$ indipendente da i .

Esempio

- La successione $f_n(z) = z^n$ è la sequenza

$$1, z, z^2, z^3, \dots, z^n, \dots$$

In questo caso $D = \mathbb{C}$

Limite di una successione complessa

- Diremo che una successione $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ di numeri complessi ha limite $L \in \mathbb{C}$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \epsilon$ per ogni $n > N$
- In simboli si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

Limite puntuale di successioni di funzioni complesse

- Si dice che il limite puntuale della successione di funzioni $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ con $f_i: D \rightarrow \mathbb{C}$ è la funzione $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ se per ogni $z \in D$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = f(z)$$

- In simboli si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

Esempi

- Il limite di $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(z) = z^n$ non esiste.
- Sia $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ e $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(z) = z^n$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$$

Serie di funzioni

- Sia I un intervallo reale e sia f_n una successione di funzioni (reali o complesse). Con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

indichiamo la successione di funzioni s_k dove

$$s_k = \sum_{n=0}^k f_n$$

Questa successione è chiamata serie di funzioni di termine generico f_n

Esempi

- Una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ è una serie di funzioni il cui termine generico è $a_n (x - x_0)^n$ e la cui k-esima ridotta parziale è il polinomio

$$p_k = \sum_{n=0}^k a_n (x - x_0)^n$$

- Una serie trigonometrica

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{h=1}^{+\infty} (c_h \cos(hx) + d_h \sin(hx))$$

è una serie di funzioni la cui ridotta parziale è un polinomio trigonometrico.

Esempio

- Se a_n è una successione complessa la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

è detta serie di potenze complessa di centro z_0 e coefficienti a_n .

Esempio

- La serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ è una serie di potenze reale di centro 0. La successione dei coefficienti è $1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$.
- La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ è una serie di potenze complessa: la differenza con la serie geometrica consiste nel fatto che z varia nei numeri complessi.

Convergenza di una serie di funzioni

- Si dice che la serie di funzioni reali o complesse

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

converge a f in D se sia f che tutte le f_n sono definite su D e

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z)$$

per ogni $z \in D$. In altre parole la successione delle ridotte parziali converge puntualmente a $f(z)$ in D ¹⁴

05/12/19

Raggio di convergenza

- Teorema: Data una successione a_n esiste R con $0 \leq R \leq +\infty$ tale che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

converge se $|z - z_0| < R$ e non converge se

$|z - z_0| > R$. In particolare se la successione

a_n è reale allora la serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$

e non converge se $|x - x_0| > R$. R è detto raggio di convergenza della serie.

Calcolo del raggio di convergenza

- Se il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ esiste allora, posto $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, si ha che il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

è $R = \frac{1}{L}$ (qui si intende $\frac{1}{0} = +\infty$ e $\frac{1}{+\infty} = 0$).

- Se $a_n \neq 0$ per ogni n e esiste $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ si ha che il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{è} \quad R = \frac{1}{L}$$

Serie di Taylor

- Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile infinite volte.

La serie di Taylor di f di centro x_0 è la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Se il centro è $x_0=0$ allora la serie è detta di McLaurin.

Funzioni analitiche

- Una funzione $f:(a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ derivabile infinite volte si dice analitica (o sviluppabile in serie) in un punto x_0 in (a,b) se esiste $\delta>0$ tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Controesempio

- Una funzione derivabile infinite volte non è necessariamente analitica. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile infinite volte in 0, ma $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni k . Se f fosse analitica allora avremmo $f(x) = 0$ in un intorno di 0.

Criterio di analiticità

- Teorema: Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile infinite volte in x_0 . Se esistono reali positivi δ, M, L tali che

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n$$

se $|x - x_0| \leq \delta$ allora f è analitica. Più precisamente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

per ogni x tale che $|x - x_0| \leq \delta$.

Dimostrazione del criterio di analiticità

La ridotta k-esima della serie di Taylor è precisamente il polinomio di Taylor di centro x_0 e grado k della funzione f .

Utilizzando il resto di Lagrange abbiamo che

$$f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}$$

e quindi, se $|x - x_0| \leq \delta$

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \left| \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} \right| |x - x_0|^{k+1} \leq \frac{M(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Dimostrazione del criterio di analiticità

- Sappiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge e quindi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{M(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!} = 0$$

Ne segue che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| = 0$$

e quindi

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Esempi

- Usando il criterio di analiticità si verifica che

$$\sin(x), \cos(x), e^x$$

sono analitiche in 0 e sono uguali alla loro serie di McLaurin per ogni valore di x . Quindi

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

e

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

per ogni x .

Esponenziale, seno e coseno complessi

- L'esponenziale complesso:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- Seno e coseno complessi:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Queste sono funzioni da \mathbf{C} in \mathbf{C}

Formula di Eulero

- In particolare

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z)^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e quindi $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$

In modo analogo si calcola che

$$e^{-iz} = \cos(z) - i \sin(z)$$

da cui si ottengono le formule di Eulero

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Proprietà dell'esponenziale

- Una proprietà importante dell'esponenziale complesso è il fatto che

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

da cui segue che, se a e b sono numeri reali allora

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$