La matrice che ha come componenti le derivate seconde viene chiamata

$\downarrow$

MATRICE HESSIANA

Ricordando che se abbiamo una matrice A:

simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

$$Q(h,k) = (h \ \ k) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$$F(P_0 + tv) = F(P_0) + \overbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)\, h + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\, k \right)}^{\nabla F(P_0) \cdot v} t +$$

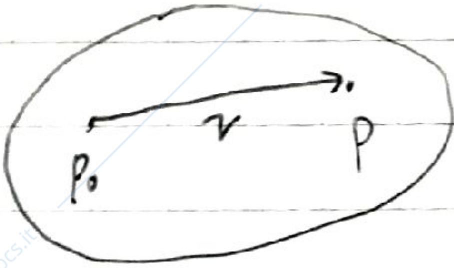
$$+ \frac{1}{2} t^2 \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)\, h^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial x \partial y}(P_0)\, hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)\, k^2 \right)}_{(h \ k)\, H(x_0, y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}$$

$$+ \, o(t^2)$$

${}^t v$

trasposto

Sviluppo di Taylor con resto di Lagrange



$P = (x, y)$

$P_0 = (x_0, y_0)$

$$v = P - P_0$$

$$v = (x - x_0, y - y_0)$$

$$g(t) = F(P_0 + tv) \qquad t \in [0, 1]$$

Assumiamo $P_0 + tv$ nel dominio della funzione F per $t \in [0, 1]$

$$g(1) = F(P_0 + v) = F(P_0 - P - P_0) = F(P)$$

$$F(P) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\xi)$$

$$g(0) = F(P_0)$$

$$g'(0) = \frac{d}{dt} F(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$$

$$\cdot (y - y_0) \Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0)$$

$$\varphi''(t) = (P-P_0)\, H(P_t)'\,(P-P_0)$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\big((x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0)\big)(x-x_0)^2$$

$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\big(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0)\big)(x-x_0)(y-y_0)$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\big(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0)\big)(y-y_0)^2$$

$$\hookrightarrow \varphi''(t) = (x-x_0 \quad y-y_0)\, H(t) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_t) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(P_t) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(P_t) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_t) \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere gli sviluppi di Taylor usando il concetto di differenziale

↓

Poniamo $dx = th$ $dy = tk$

grassetto

$v = (h,k)$ $\qquad d\mathbf{x} = (dx, dy)$

$h^2 + k^2 = 1$

$$t^2 = t^2(h^2+k^2) = \|d\mathbf{x}\|^2$$

lo svil. di Taylor con resto di Peano può essere quindi riscritto:

$$F(P_0 + d\mathbf{x}) = F(P_0) + \overbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)dy\right)}^{\text{diff. primo } (dF(P_0))}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(P_0)dx\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)dy^2\right)}_{\text{diff. secondo } (d^2F(P_0))} + o(d\mathbf{x}^2)$$

es.

$$F(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2} \quad \text{in } (1,1)$$

Calc. matrice hessiana e diff. secondo

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2}=\frac{1+\cancel{x^2}+y^2-\cancel{x^2}}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}2y=\frac{-xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rightarrow \quad H(1,1)=\begin{pmatrix}\frac{2}{(\sqrt{3})^3} & -\frac{1}{(\sqrt{3})^3}\\ -\frac{1}{(\sqrt{3})^3} & \frac{2}{(\sqrt{3})^3}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad d^2F(1,1)=\frac{2}{(\sqrt{3})^3}dx^2-\frac{2}{(\sqrt{3})^3}dx\,dy+\frac{2}{(\sqrt{3})^3}dy^2$$

Possiamo calcolare con il resto di Lagrange l'errore dell'approssimazione lineare.

Approx lin. $L(x,y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$

$$\underbrace{|F(x,y) - L(x,y)|}_{\text{ERRORE LINEARE}} = \frac{1}{2}\left| (x - x_0 \quad y - y_0)\, H(P_2) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right|$$

↳ Si osserva che:

$$|F(x,y) - L(x,y)| \le \frac{1}{2} \underbrace{\|H(z)\| \underbrace{\|(x - x_0, y - y_0)\|^2}_{(\text{Distanza di } P \text{ da } P_0)^2}}$$

possiamo poi stimarlo

$$\le \frac{c}{2} r^2$$

valore massimo della funzione in un intorno $N_r(x_0, y_0)$

es.

$$F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Calc. errore, $N_{(0,1)}((1,1))$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\hookrightarrow H(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$$

$$\| H(x,y) \| = \sqrt{\frac{1}{(x^2+y^2)^3} \left(\cancel{y^4 + x^2y^2} + x^2y^2 + x^4 \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(x^2+y^2)}}$$

$$|F(x,y) - L(x,y)| \leq \frac{1}{2} \, C \, (0,1)^2$$

$$C \geq \sqrt{\frac{1}{(x^2+y^2)}} \quad \text{nel} \quad N_{(0,1)}((1,1))$$

$\sqrt{2} - 0,1 \Leftarrow$ dobbiamo maggiorare $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sul dischetto

$\hookrightarrow \|H(x,y)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2} - 0,1}$

$\hookrightarrow |F(x,y) - L(x,y)| \leq \frac{1}{2} \cdot 0,776 \cdot 0,1^2 = 0,0038$

MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI 2 VARIABILI

MAX

$F(x,y) \leq F\underbrace{(x_0, y_0)}_{\text{punto di max}}$

MIN

$F(x,y) \geq F(x_0, y_0)$

Si fa la stessa cosa che per una variabile, ma in 2 dimensioni

Se abbiamo che:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ + continua $\Rightarrow$ Esistono massimo e minimo assoluto

chiuso

in 2 variabili

si dice COMPATTO

Teorema di Weierstrass

↳ D sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$ e $F: D \to \mathbb{B}$ continua

$\Downarrow$

Esistono max e min assoluto

Teorema di Fermat

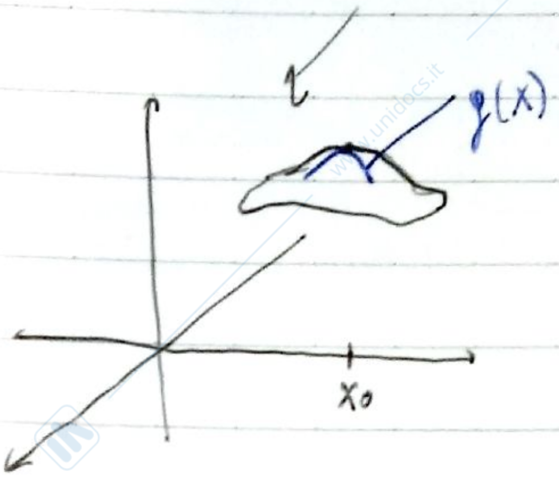
↳ Condizione necessaria + forte che i punti di max e min devono possedere

con $(x_0, y_0) \in D$ e $F: D \to \mathbb{B}$

deve essere derivabile $\nabla F(x_0, y_0) = (0,0)$

Supponiamo che (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo

$g(x) = F(x, y_0)$ $g(x)$ ha un max relativo



$g'(x_0) = 0 \rightarrow 0 = g'(x_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$

→ stessa cosa per y

$h(y) = F(x_0, y)$ ha massimo relativo in y_0

$\Rightarrow h'(y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

→ F deve essere DERIVABILE in (x_0, y_0)

I punti stazionari che sono punti di massimo e minimo si chiamano <u>estremi liberi</u>

I punti di frontiera che sono punti di max e min si chiamano <u>estremi vincolanti</u>

<u>es.</u>

- $F(x,y) = x^2+y^2$

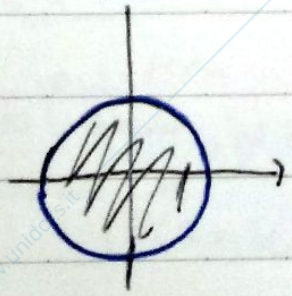
sempre pos. $\longrightarrow$ ha come punto di min ass. in $(0,0)$

punto stazionario

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \rightarrow \nabla F(x,y) = (2x, 2y)$$

$$\nabla F(0,0) = (0,0)$$

- Sia $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$



$F: D \to \mathbb{R}$

$F(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$F(0,0) = 1 \geq F(x,y)$

punto di max assoluto

$F(x,y) \geq 0 \rightarrow F(x,y) = 0$ min ass. $\iff x^2+y^2 = 1$ — punti di min ass. sono di frontiera

Il teorema di Fermat → è solo necessario

ma non suff.

es. $F(x,y) = xy$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x \rightarrow \nabla F(x,y) = (y, x)$$

$$\nabla F(x,y) = (0,0) \rightarrow (y, x) = (0,0)$$

↓

unico punto staz.

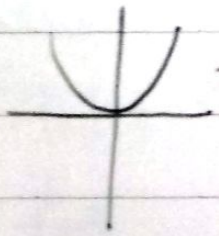
ma non è né un punto di max né min.

→ Per verificare che la funzione non ha né max né min in $(0,0)$

↓

Possiamo restringere la funzione sulla retta $x = y$

↳ $F(x,x) = x^2$

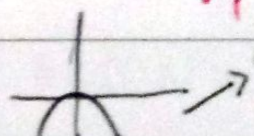


→ ci dice che è un minimo

$\neq \Rightarrow$ PUNTO DI SELLA

ma se restringiamo a $x = -y$

$F(x,-x) = -x^2$



↗ max

FORME QUADRATICHE

$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$

$\hookrightarrow$

$$(h \; k) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

- DEFINITA POSITIVA se $Q(h,k) \geq 0$, e $Q(h,k) = 0 \iff (h,k) = (0,0)$

- DEFINITA NEGATIVA se $Q(h,k) \leq 0$ e $Q(h,k) = 0 \iff (h,k) = (0,0)$

- SEMIDEFINITA POSITIVA $Q(h,k) \geq 0$

- SEMIDEFINITA NEGATIVA $Q(h,k) \leq 0$

- INDEFINITA se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa
  $\hookrightarrow$ esistono (h_1,k_1), (h_2,k_2) tali che $Q(h_1,k_1) > 0$ e $Q(h_2,k_2) < 0$

- DEF. POS. $\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0$

  e $\underline{a > 0}$

- DEF. NEG $\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0$ e $\underline{a < 0}$

- INDEF $\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} < 0$

- SEMI DEF. POS $\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \geq 0$ e $\underline{a+c \geq 0}$

- SEMI DEF. NEG $\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \geq 0$ e $\underline{a+c \leq 0}$

Applichiamo ciò agli estremi liberi

Se $\nabla F(x_0, y_0) = (0,0)$

Sviluppo di Taylor → $F(x,y) = F(x_0,y_0) + \cancel{\nabla F(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)} + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0) H(z) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

Se la forma quadr. $(h\ k)\, H(z) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ è def. pos. per (x,y) in un intorno di (x_0, y_0)

↳ $F(x,y) - \underbrace{F(x_0, y_0)}_{\Downarrow} \geq 0$

Punto di min.

Se è def. neg. $\Rightarrow$ (x_0, y_0) è un max

↳ ma non sappiamo z e ogni scelta di x e y mi determina un nuovo z

↓

mi serve un test che mi dica che tutte le $H(z)$ $\forall (x,y)$ è def. pos. o def. neg.

Test matrice Hessiana

↳ Supponiamo che F sia di classe C^2

se $\det H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ — per max < 0

↳ $(a > 0)$

Allora, visto che:

$$\det H(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$$

e $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)$ — sono continue in un intorno di (x_0, y_0) e sono entrambe pos.

Per il teo. della perm. del segno rimangono positive in un intorno di (x_0, y_0) $\rightarrow$ (x_0, y_0) è un punto di min relativo

Se $\det H(x_0,y_0)<0$

↳ Usiamo la formula di Taylor con resto di Peano:

$$F(x_0+th,\ y_0+tk)-F(x_0,y_0)=\frac{1}{2}t^2(h,k)\,H(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o(t^2)$$

dove significa

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x_0+th,\ y_0+tk)-F(x_0,y_0)-\frac{1}{2}t^2(h,k)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}}{t^2}=0$$

Siccome è indefinita esistono 2 versori (h_0,k_0) e (h_1,k_1) t.c.

$$(h_0,k_0)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h_0\\k_0\end{pmatrix}>0 \quad e \quad (h_1,k_1)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h_1\\k_1\end{pmatrix}<0$$

↳ quindi

$$\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{\boxed{F(x_0+th_0,\ y_0+tk_0)-F(x_0,y_0)}}^{*1}}{t^2}=\frac{1}{2}(h_0,k_0)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h_0\\k_0\end{pmatrix}>0$$

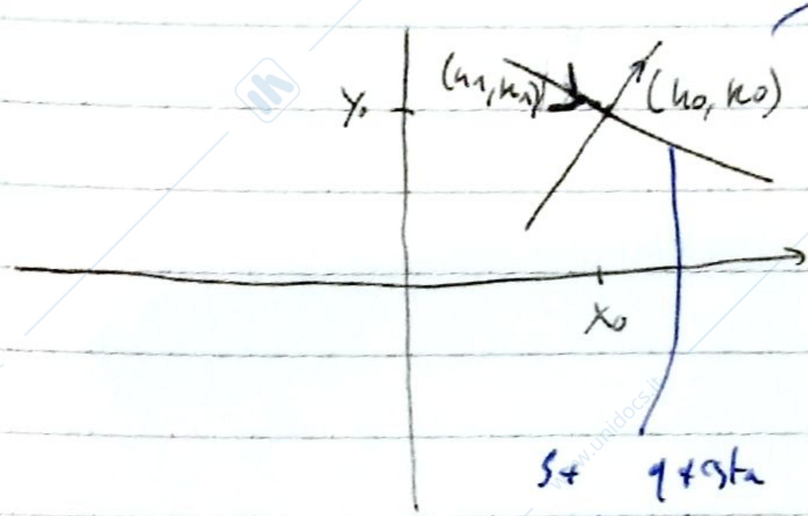
e

$$\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{\boxed{F(x_0+th_1,\ y_0+tk_1)-F(x_0,y_0)}}^{*2}}{t^2}=\frac{1}{2}(h_1,k_1)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h_1\\k_1\end{pmatrix}<0$$

⇒ Se t abbastanza piccolo:

$*^1>0 \qquad *^2<1$

Essenzialmente accade che:



su questa retta h_0,k_0 la funzione cresce sempre → (x_0,y_0) è punto di min

su questa retta di dir. (h_1,k_1) la funzione scende → (x_0,y_0) è punto di max

$\nexists$

$\Downarrow$

PUNTO DI SELLA

<u>Oss.</u> Se $\det H(x_0,y_0)=0$ il test non è decisivo

<u>es.</u>

- $F(x,y)=x^4+y^4$ $\quad \dfrac{\partial F}{\partial x}=4x^3 \quad \dfrac{\partial F}{\partial y}=4y^3$

$\det H(0,0)=0 \Leftarrow \nabla F(x,y)=(4x^3,4y^3)=(0,0) \Leftrightarrow x=y=0$

↓ tutte e 3 hanno $\det H(0,0)=0$ → test non decisivo

$F(x,y)\geq 0 \Rightarrow F(0,0)=0$ (0,0) è il punto di min. assoluto

- $F(x,y)=-x^4-y^4\leq 0$ . . . . .

$\det H(0,0)=0 \Leftarrow F(0,0)=0 \to (0,0)$ è punto di max

- $F(x,y)=x^4-y^4$ ha un punto di sella in $(0,0)$