SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Sono sequenze di funzioni

ossia in ogni punto

Il limite puntuale è $f: I \in \mathbb{R}$ se per ogni $x \in I$ si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

è abbastanza complicato da calcolare

es. $f_n(x) = x^n$

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{n \to \infty} f_n$ esiste?

cioè $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ esiste finito per ogni x

→ se $x > 1$ $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} x^{\infty} = +\infty$ NO

No. ANALISI 2

Date 3 12 19

Oss. se cambiamo il dominio

$f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = x^n$

$\lim_{n \to +\infty} x^n = 0 \longrightarrow$ esiste il limite puntuale $f(x) = 0$

Se facciamo

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = x^n$

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

il limite esiste ma non è una funzione continua

limite $\to f : (0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ANALISI 2

Date 3 12 19

OSS Le successioni di funzioni si possono estudiare pure alle funzioni complesse.

→ limite funzione complessa

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

↑ limite

es.

$f_n : D \to \mathbb{C}$

$D = [z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1]$

$f_n(z) = z^n$

$\lim_{n \to +\infty} f_n = 0$ → poiché da def.

Dato $\varepsilon > 0$ esiste N tale che

$|z^n| < \varepsilon \quad \forall n > 0$

Quindi dato $\varepsilon > 0$ esiste N tale che

$$|z^n - 0| = |z^n| < \varepsilon$$

Serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

Successione di funzioni S_k

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} f_n$$

→ **Serie trigonometrica**

$$S_k = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx) \right)$$

ridotta parziale S_k

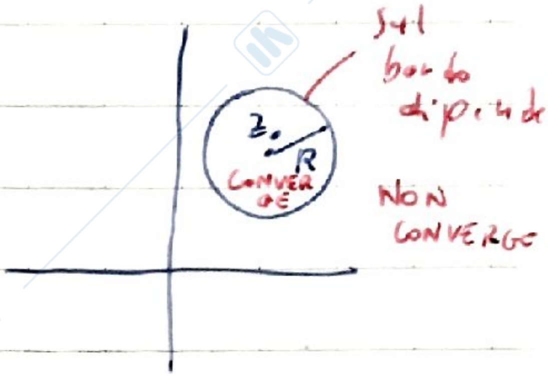
→ **Convergenza di una serie di funzioni**

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \iff \lim_{k \to +\infty} S_k = f$$

limite puntuale

Raggio di convergenza

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$



Converge se $|z-z_0|<R$

non converge se $|z-z_0|>R$

$\downarrow$

raggio di convergenza

se esiste $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ coeff. n-esimo

allora $R = \dfrac{1}{L}$

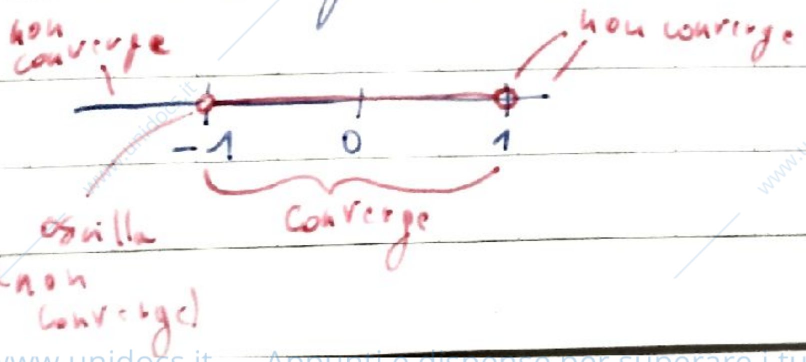
es.

Serie geometrica reale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|1|} = 1 = L \qquad R = 1$$

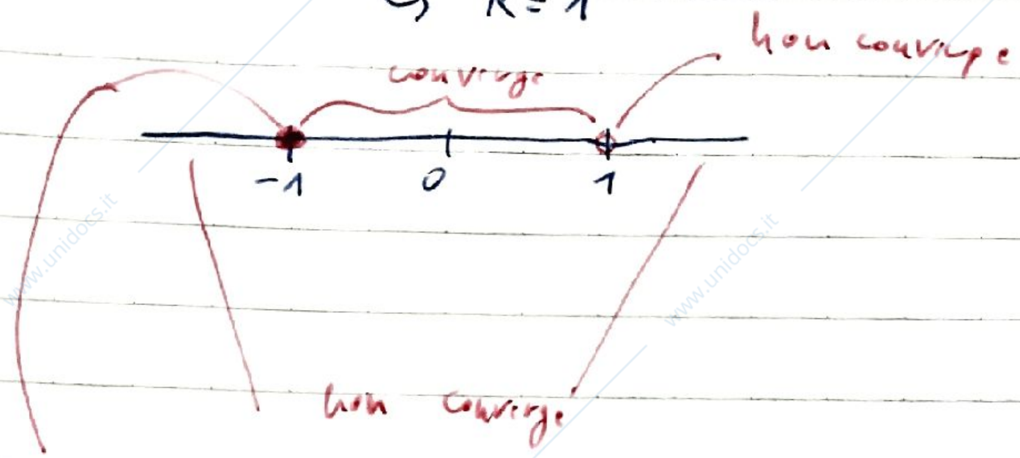
la serie converge tra -1 e 1



es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

↳ $R = 1$



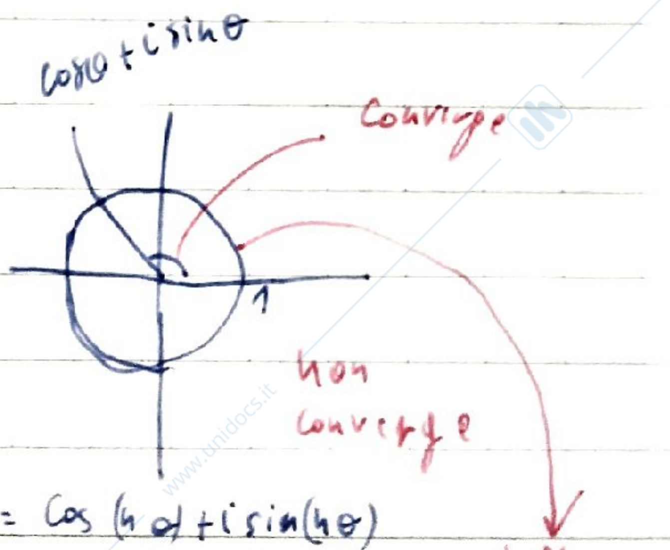
Serie di Leibnitz: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Converge per il criterio di Leibnitz

Considerazioni gli esempi precedenti ma con funzioni complesse:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

$R = 1$



sul bordo: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

continua a girare — non converge

es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

usiamo il 2° criterio (del rapporto) $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$$

$R = \frac{1}{0} = +\infty \rightarrow$ converge su tutto $\mathbb{C}$

Funzioni analitiche

Sono le funzioni che sono uguali alla loro serie di Taylor.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

esistono infatti funzioni che non sono uguali al loro sviluppo di Taylor

es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\neq$ anche se deriv. infinite volte

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{=0} x^n = 0 \quad \forall x$$

Dobbiamo trovare dei criteri per verificare se una funzione analitica.

↓

Criterio di analiticità

Esistono δ, M, L positivi t.c.:

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n$$

derivabile infinite volte in x_0

se $|x-x_0| \leq \delta$ allora f è analitica

→ Dimostrazione

resto di Lagrange

↓

$$f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$

usiamo

$$\downarrow \; f^{(n)}(x) \leq ML^n$$

$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right| \leq \left|\frac{\overbrace{f^{(k+1)}(c)}^{\leq ML^{k+1}}}{(k+1)!}\right| \underbrace{|x-x_0|^{k+1}}_{\delta^{k+1}} \leq \frac{M(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Sappiamo che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{converge}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \frac{M(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!}$$

quindi applicando il teorema del confronto

$$\lim_{k \to +\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{k} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \right| = 0 \quad \checkmark$$

es.

- $f(x) = \sin(x)$

$$|f^{(k)}(x)| \leq 1$$

$$M = 1 \quad L = 1$$

$\downarrow$ condiz. verificata $\rightarrow$ analitica

$$\hookrightarrow |f^{(k)}(x)| \leq ML^k$$

- $f(x) = e^x \qquad f: \underbrace{(a,b)}_{\text{puntiamo un intervallo}} \to \mathbb{R}$ dove a e b sono qualsiasi

$$f^{(k)}(x) = e^x$$

$\Downarrow$

$$f^{(k)}(x) \leq e^b = ML^k \begin{cases} M = e^b \\ L = 1 \end{cases} \rightarrow \text{analitica dappertutto}$$

Formula di Eulero

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n \text{ PARI}} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n \text{ DISPARI}} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (z)^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \cos(z) + i \sin(z)$$

Perciò

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$$

$$e^{-iz} = \cos(z) - i \sin(z)$$

formule di Eulero:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$