Errore slide Lezione 13 — slide corrette adesso

↓

Coordinate sferiche

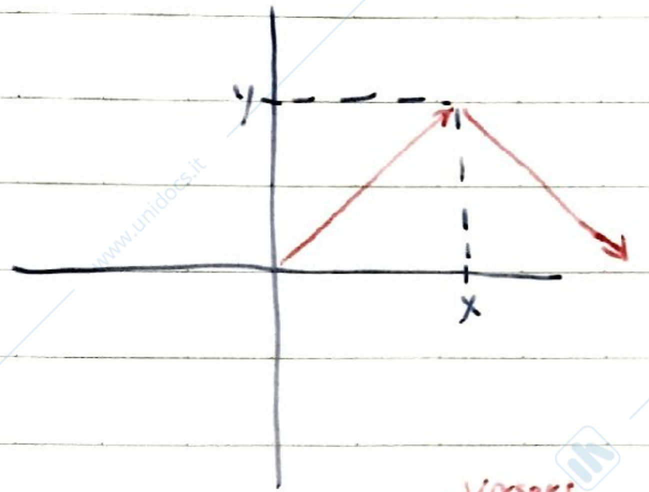
$$F: [0,+\infty) \times [0, 2\pi) \times \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}_{\text{errore}}$$

$$F(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos\theta \cos\phi, \rho \sin\theta \cos\phi, \rho \sin\phi)$$

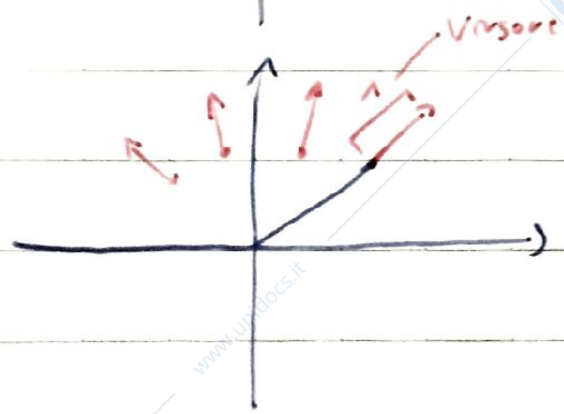
CAMPI VETTORIALI

Una funzione che associa a 2 vettori altri 2 vettore (da piano a piano, da spazio a spazio).

Rappresentazione pratica



$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad F(x,y) = (y, -x)$



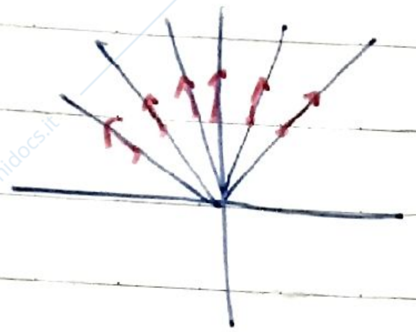
$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Linee di campo

$$\vec{r}\,'(t) = F$$

es.



$$r(t) = t\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Campi lisci: → le componenti sono di tipo C^∞

↓ l'insieme dei campi lisci si indica con

$$C^\infty(D,\mathbb{R}^2), \quad C^\infty(D,\mathbb{R}^3)$$

piano ↑ spazio ↑

lineare

Operatori differenziali: Sono funzioni che hanno come dominio uno spazio di funzioni e come codominio un altro spazio di funzioni

laplaciano → $\Delta : C^\infty(D) \to C^\infty(D)$

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

assume: funz. scal. ↓ camp. vett. ↓

- gradiente $\nabla : C^{\infty}(D) \to C^{\infty}(D, \mathbb{R}^2)$

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

- rotore $\mathrm{rot} : C^{\infty}(D, \mathbb{R}^3) \to C^{\infty}(D, \mathbb{R}^3)$

$$\mathrm{rot} F = \nabla \times F$$

dove $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

- divergenza $\mathrm{div} : C^{\infty}(D, \mathbb{R}^3) \to C^{\infty}(D)$

↑ funzione scalare

$$\mathrm{div} F : \nabla \cdot F$$

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

No. ANALISI 2

Date 11. 11. 19

Identità differenziali

$f: D \to \mathbb{R}^3$

- $rot(\nabla F) = \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$

$\downarrow$ poiché

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \hat{i}\cancel{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)} - \hat{j}\cancel{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right)} + \hat{k}\cancel{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)} = 0$$

$C^\infty \longrightarrow$ teorema di Schwartz

- $div.(rot\, f) = \nabla \cdot (\nabla \times f) = 0$

$\downarrow$ poiché

$$\nabla \cdot \left(\hat{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right)$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}} = 0$$

- $\nabla(\nabla F) = \Delta F$

→ Rotore di un campo piano

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \hat{k}$$

$$F(x,y,z) = F_1(x,y)\hat{\imath} + F_2(x,y)\hat{\jmath} + 0 \cdot \hat{k}$$

Campi conservativi

Un campo è conservativo la funzione è un gradiente.

$F: D \to \mathbb{R}^n$ conserv. se esiste

$\phi : D \to \mathbb{R} \mid F = \nabla \phi$

si dice potenziale del campo → non unico

anche $\phi + c$ è pot.

es. $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z)$$

è conservativo $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|}$$ è un pot. per F

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\nabla\varphi(x,y,z) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}(x,y,z)$$

Cond. n.c. per campi nello spazio

Teo: se $F, D \to \mathbb{R}$ è cons. allora

$$\text{rot}\,F = 0$$

$\downarrow$ perchè

$$\nabla \times F = \nabla \times \nabla\phi = 0$$

es. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = (2x, e^{xy})$$

rotore
$$\begin{cases} \dfrac{\partial e^{xy}}{\partial x} = e^{xy}\cdot y \neq 0 \to \text{non è conservativo} \\ \dfrac{\partial 2x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Se il rotore è nullo se riusciamo a calcolare esplicitamente il potenziale allora è conservativo.

→ Calcolo potenziale

Es. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = (2x + 2xy^2, 2y + 2yx^2)$

$\frac{\partial}{\partial y}(2x+2xy^2) = 4xy$

$\parallel \to \text{rot } F = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}(2y + 2yx^2) = 4xy$

↓ può essere cons.

→ Potenziale: Cerchiamo $\phi(x,y) \mid F = \nabla\phi$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x + 2xy^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2y + 2yx^2$$

$$\boxed{\phi(x,y) = x^2 + x^2y^2 + y^2 + K}$$

$\phi(x,y) = \int (2x + 2xy^2)dx = x^2 + x^2y^2 + c(y)$

poi faccio → $\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = 2x^2y + c'(y) = 2y + 2yx^2$

$c'(y) = 2y \to c(y) = y^2 + K$

es.

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$$

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} , \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

rot F = 0

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \to \phi(x,y) = \int \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dx \to \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{\ln t}{2} + c(y)$$

$t \to x^2+y^2$

$$t = x^2+y^2$$

$$dt = 2x\,dx$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}(x^2+y^2)} + c'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} \to c'(y) = 0$$

$$c(y) = k$$

$$\to \phi(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + k$$

$\downarrow$

è cons.

controes

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$$

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right)}{\partial y} = - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \operatorname{rot} F = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \to \phi(x,y) = -\int \frac{y}{x^2+y^2}\, dx = \int \frac{-y}{y^2\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)} dx$$

$$t = \frac{x}{y} \qquad dt = \frac{dx}{y}$$

$$= -\int \frac{1}{t^2+1}\, dt = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + c(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = + \frac{x}{\underbrace{y^2\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)}_{x^2+y^2}} + c'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \begin{aligned} c'(y) &= 0 \\ c(y) &= k \end{aligned}$$

$$\phi(x,y) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + k$$

non ha senso in $y=0$

← non è definito in tutti i punti in cui è def. il campo

Integrali di linea

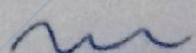
Nell'esempio $F(x,y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} , \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

avevamo visto che $\phi(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + k$

ma per verificare se esiste o no il potenziale bisogna introdurre la definizione di integrale di linea

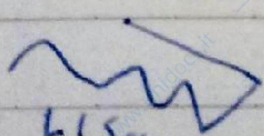
integrale del potenziale lungo un arco liscio → Arco liscio: è una curva in D (solitamente aperto in $\mathbb{R}^2$) differenziabile e regolare | $\gamma'(t)$ è continua in $[a,b]$

$\gamma : [a,b] \to D$



LISCIO

Si dice a tratti se γ è continua tranne che in un numero finito di punti



LISCIO A TRATTI

integrale di linea li

$F: D \to \mathbb{R}^n$ lungo l'arco liscio

$r: [a,b] \to D$

$$\int_r F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

Se arco liscio a tratti

$$\underbrace{\int_r F \cdot dr}$$ somma degli integrali di linea sui tratti lisci

integrale di linea

$$\int_r F\, dr = \int_{r_1} F\, dr_1 + \int_{r_2} F\, dr_2$$

r_1 e r_2 lisci

Circuitazione

$r: [a,b] \to D$ è una curva chiusa, cioè $r(a) = r(b)$, allora l'integrale di linea di F su r si chiama CIRCUITAZIONE

$$\oint_r F \cdot dr$$

es.

$$F(x,y) = (2x+y, -x+1) \quad \text{e sia} \quad r:[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$r(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\oint_r F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\,dt =$$

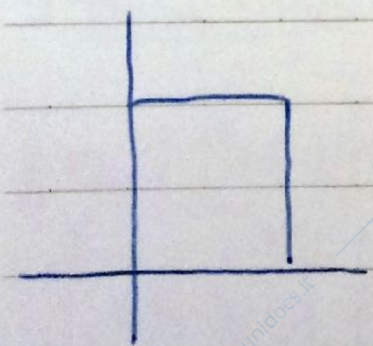
$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t + \sin t, -\cos t + 1)(-\sin t, \cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[\underbrace{-2\cos t \sin t}_{\sin 2t} \cancel{-\sin^2 t - \cos^2 t}^{\to -1} + \cos t \Big] dt =$$

$$\left(\frac{\cos 2t}{2} - t + \sin t \right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} - 2\pi - \frac{1}{2}$$

es

$$F(x,y) = (2x+y, -x+1) \qquad r:[0,4] \to \mathbb{R}^2$$



$$r(t) = \begin{cases} (t,0) & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ (1,t-1) & \text{se } 1 \le t \le 2 \\ (3-t,1) & \text{se } 2 \le t \le 3 \\ (0,4-t) & \text{se } 3 \le t \le 4 \end{cases}$$

$$\oint_r F \cdot dr = \int_0^1 F(t,0)\cdot(1,0) + \int_1^2 F(1,t-1)\cdot(0,1)\,dt +$$

$$+ \int_2^3 F(3-t,1)\cdot(-1,0)\,dt + \int_3^4 F(0,4-t)\,(0,-1)\,dt$$

Dipendenza dalla parametrizzazione

cambiamo la param. dell'arco

$t \to t(s)$

liscio

$$t : [a', b'] \to [a, b]$$

deve valere che $t'(s)$ non cambia segno (monotona)

↓

invertibile

Se t è crescente $\to \int_{\gamma} F\,d\gamma = \int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1$

Se t è decrescente $\to \int_{\gamma} F\,d\gamma = -\int_{\gamma_1} F\,d\gamma_1$

Dimostrazione

$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma \qquad t : [a', b'] \to [a, b]$ crescente $\gamma_1(s) = \gamma(t(s))$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = \int_{a'}^{b'} F(\underbrace{\gamma(t(s))}_{\gamma_1(s)}\ \gamma_1'(s))\,ds =$$

crescente quindi

$$\int_{a'}^{b'} F(\gamma(t(s))) \cdot \gamma'(t(s)) \cdot \underbrace{t'(s)\,ds}_{dt} = \int_{t(a')=a}^{t(b')=b} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_{\gamma} F\,d\gamma$$

5 | Mo | Tu | We | Th | Fr | Sa | Su

No. ANALISI 2

Date 22 · 11 · 17

se t è decrescente

$$\int_{t(b')=b}^{t(b')=a} F(r(t))\cdot r'(t)\,dt = -\int_a^b F(r(t))\,r'(t)\,dt = -\int_r F\,dr$$

Teorema: Quando il campo è conservativo l'integrale di linea del campo su qualsiasi curva

$r:[a,b]\to D$ $\quad P=r(a)$ e $Q=r(b)$

$$\int_r F\,dr = \phi(Q)-\phi(P)$$

$\downarrow$ l'integrale di linea non dipende dall'arco ma dai suoi estremi

$$\oint_r F\,dr = 0$$

→ Dimostrazione

$$\int_r F\,dr = \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt \overset{\text{cons.}}{=} \int_a^b \nabla\phi(r(t))\cdot r'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(r(t))\,dt =$$

$$\phi(r(b)) - \phi(r(a)) = \phi(Q)-\phi(P)$$

Se γ è liscio a tratti $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ tratti lisci $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n$

$$\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$$

il punto finale di un arco è uguale al punto iniziale dell'arco successivo

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \int_{\gamma_1} F\,d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} F\,d\gamma_2 + \dots + \int_{\gamma_k} F\,d\gamma_k =$$

$$= \phi(\gamma_1(b_1)) - \phi(\gamma_1(a_1)) + \phi(\gamma_2(b_2)) - \phi(\gamma_2(a_2)) \dots + \phi(\gamma_k(b_k)) +$$

$$- \phi(\gamma_k(b_k)) = \phi(\gamma_k(b_k)) - \phi(\gamma_1(b_1)) =$$

$$\phi(Q) - \phi(P)$$

es $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$ è conservativo.

lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}} \right) (-\sin t, \cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

circuitazione non nulla $\Rightarrow$ Campo F NON conservativo

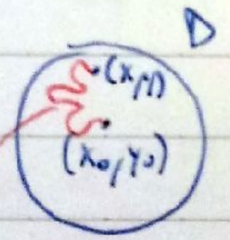
l'integrale di linea ci da condizione NECESSARIA e SUFFICIENTE affinché un campo sia conservativo

Teorema: se $F: D \to \mathbb{R}$ è un campo vettoriale

conservativo $\Leftrightarrow \oint_\gamma F\,dr = 0$

γ curva liscia chiusa

→ Dimostrazione (Idea):



Calcolo l'integrale di linea su questa curva

si definisce

$$\phi(x,y) = \int_\gamma F \cdot dr \quad \text{dove } \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

è una qualsiasi arco liscio a tratti t.c. $\gamma(a) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(b) = (x,y)$

non dipende dalla curva

Si dimostra che $\phi(x,y)$ è un potenziale

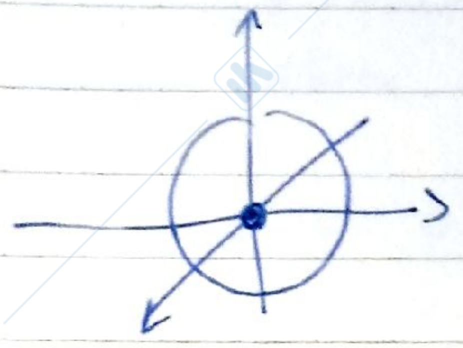
È impossibile però verificare che il potenziale non dipende da nessuna curva

↓ Infinite possibilità

Diciamo in generale che la condizione è anche sufficiente quando lavoriamo su domini semplicemente connessi

Dominio semplicemente connesso: è un dominio connesso e ogni curva continua chiusa in D può essere deformata fino ad essere un unico punto senza farla uscire da D

es $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$



è sempl. connesso poiché sfrutto la terza dimensione e posso "evitare" quel punto

Teorema: un campo definito su un dominio D sempl. connesso è cons. se e solo se il suo rotore è nullo

es. Sia $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$

Fare a casa

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z)$$

Determinare se è conservativo

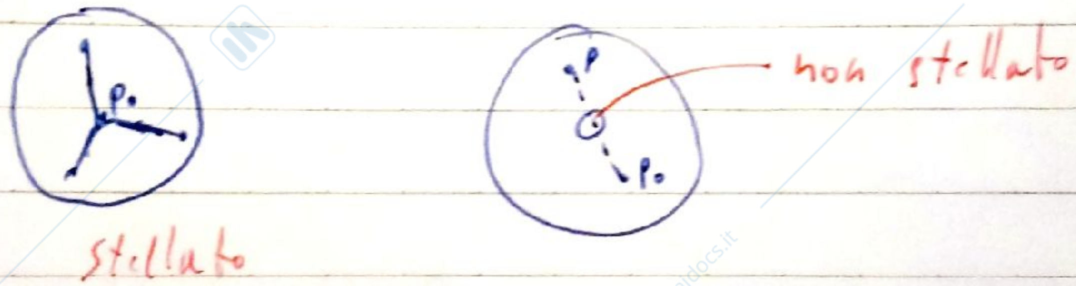
$$\nabla \times F = \vec{0}$$

Il dominio è sempl. connesso $\Rightarrow$ F è cons.

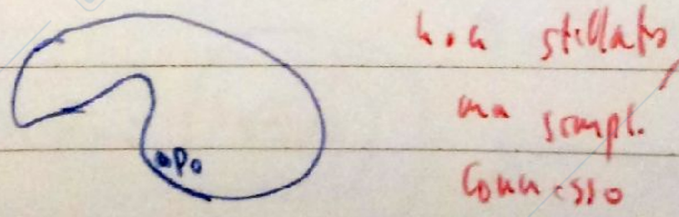
Insiemi per cui è facile determinare se un dominio è sempl. connesso:

Insiemi stellati:

Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ si dice stellato se esiste un punto P_0 di D t.c. per ogni punto P di D, il segmento $\overline{P_0P}$ è cont. in D.



N.B ci sono domini sempl. connesso che non sono stellati



Teorema: STELLATI $\Rightarrow$ SEMPL. CONNESSI

(sia per $\mathbb{R}^2$ che $\mathbb{R}^3$)

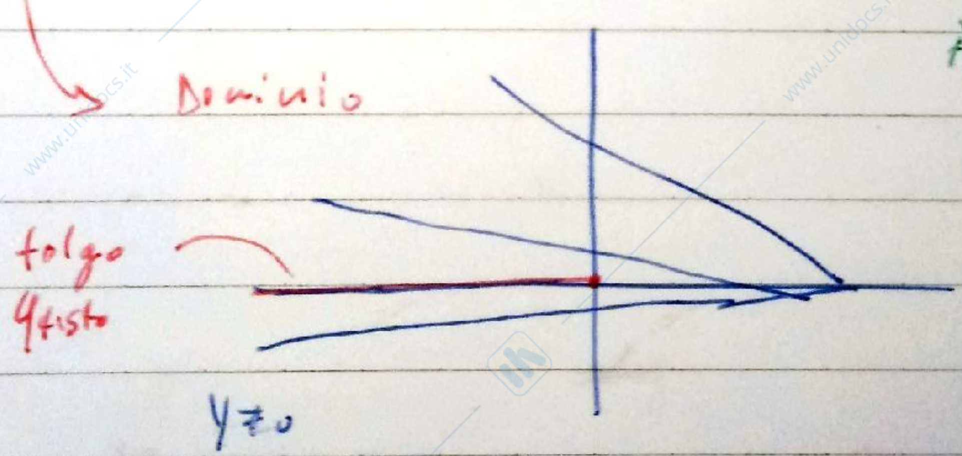
Se il dominio di un campo cons. F è connesso e ϕ, ψ sono due potenz. del campo allora vale che

$$\psi = \phi + \underset{\text{costante}}{c}$$

es $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}$

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Verificare se è cons. e $\underbrace{\text{calc. pot.}}_{\text{fare a casa}}$



è stellato

$\Downarrow$

sempl. connesso

$\Downarrow$

è cons.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari