

# Lezione 22/10

## Funzioni convesse

# Esercizio

- Calcolare e classificare i punti stazionari della funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$F(x, y) = x^3 + xy + y^2 - 1$$

# Esercizio

- Calcolare e classificare i punti stazionari della funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2$$

# Esercizio

- Calcolare i punti di massimo assoluto della funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$F(x, y) = (x^2 + 1)e^{-x^2 - y^2}$$

# Epigrafico di una funzione

- La regione nello spazio che sta sopra il grafo di una funzione  $F$  è detta epigrafico della funzione. In simboli:

$$\text{epi } F = \{(x, y, z) \mid z \geq F(x, y)\}$$

# Funzioni convesse e concave

- Una funzione (definita in un dominio  $D$  convesso) si dice convessa se  $\text{epi}F$  è convesso.
- Una funzione (definita in un dominio  $D$  convesso) si dice concava se  $-F$  è convessa.

# Convessità e piano tangente

- Teorema:

Se  $F$  è di classe  $C^1$  definita su un aperto  $D$  convesso allora  $F$  è convessa se e solo se per ogni coppia di punti  $P_0, P$

$$F(P) \geq F(P_0) + \nabla F(P_0) \cdot (P - P_0)$$

è concava se e solo se

$$F(P) \leq F(P_0) + \nabla F(P_0) \cdot (P - P_0)$$

# Convessità e matrice hessiana

- Corollario 1:
- Se il differenziale secondo di  $F$  è semidefinito positivo in tutto il dominio della funzione allora la funzione è convessa.
- Se il differenziale secondo è semidefinito negativo in tutto il dominio della funzione allora la funzione è concava.

# Ottimizzazione di funzioni convesse

- Corollario 2:
- Se  $P_0$  è un punto stazionario di una funzione convessa allora è un punto di minimo assoluto
- Se  $F$  è concava allora  $P_0$  è un punto di massimo assoluto

# Dimostrazione del corollario 2

Se  $F$  è convessa e  $P$  è un punto qualsiasi del dominio, allora

$$F(P) \geq F(P_0) + \nabla F(P_0) \cdot (P - P_0)$$

ma, siccome  $P_0$  è stazionario,  $\nabla F(P_0) = \vec{0}$  e quindi

$$F(P) \geq F(P_0)$$

# Esempio

- Dati  $n$  punti nel piano di coordinate

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

si consideri la funzione  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
definita ponendo

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 + \sum_{i=1}^n (y - y_i)^2$$

Calcolare i punti di minimo assoluto di  $F$ .

# Retta di regressione

- Supponiamo di avere  $n$  osservazioni congiunte di due grandezze  $(x,y)$

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

- La retta di regressione è la retta di equazione  $y=ax+b$  che meglio approssima le osservazioni

Vogliamo cioè che

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

sia minimo

# Varianza e covarianza

- Introduciamo le medie aritmetiche dei valori  $x_i$  e  $y_i$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

- La varianza della variabile  $x$  è

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2$$

- La covarianza delle variabili  $x$  e  $y$  è

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)$$

# Formule per varianza e covarianza

- Introduciamo le medie aritmetiche

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- Abbiamo che

$$\sigma_x^2 = \bar{q} - \bar{x}^2$$

$$\sigma_{xy} = \bar{p} - \bar{x} \bar{y}$$

# Esercizio

- Verificare che la retta di regressione delle osservazioni

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

è

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x})$$