Lezione 18/10

Massimi e minimi

Problema

- Data una funzione di due variabili trovare il massimo e il minimo assoluti della funzione.

- Il primo passo per risolvere il problema consiste nel determinare se il massimo e il minimo assoluti esistono.

Teorema di Weierstrass

- Diremo che un sottoinsieme di R^2 è limitato se esiste r>0 tale che $N_r((0,0))$ contiene D.
- Teorema: Se D è un sottoinsieme di R^2 chiuso e limitato, e $F : D \to B$ è continua allora F ammette massimo e minimo assoluti, esistono quindi punti (x_M,y_M) e (x_m,y_m) in D tali che

$$F(x_m, y_m) \leq F(x, y) \leq F(x_M, y_M)$$

per ogni (x,y) in D.

Teorema di Fermat

- Il secondo passo per determinare il massimo e il minimo di una funzione consiste nel trovare condizioni necessarie affinchè un punto sia di massimo o minimo relativo, perché in questo modo si escludono molti punti. Il teorema che dà la condizione necessaria più forte che i punti di massimo e minimo relativo devono possedere è il teorema di Fermat.

Teorema di Fermat

- Teorema: Sia $F : D \to B$ una funzione di due variabili e (x_0,y_0) un punto interno di D. Se (x_0,y_0) è un punto di massimo o minimo relativo e F è derivabile in (x_0,y_0) allora

$$\nabla F(x_0, y_0) = (0,0)$$

Dimostrazione del teorema di Fermat

- Se F ha un estremo relativo in (x_0,y_0) allora la funzione $f(x)=F(x,y_0)$ ha un estremo relativo in x_0, ma allora $f'(x_0)=0$ per il teorema di Fermat in una variabile reale. Siccome $f'(x_0)=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ otteniamo $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=0$
- Allo stesso modo la funzione $g(y)=F(x_0,y)$ ha un estremo relativo in y_0 e quindi $g'(y_0)=0$ da cui si ottiene $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

Conseguenze del teorema di Fermat

- Per il Teorema di Fermat se (x_0,y_0) è un punto di massimo o minimo relativo, allora ci sono tre possibilità:
  - (x_0,y_0) è un punto di frontiera (non è interno)
  - (x_0,y_0) è un punto interno in cui F non è derivabile (punto singolare)
  - (x_0,y_0) è un punto in cui F è derivabile e il gradiente si annulla (punti stazionari)

Estremi liberi e estremi vincolati

- I punti di frontiera che sono punti di massimo o minimo relativo sono detti estremi vincolati della funzione.
- I punti stazionari che sono punti di massimo o minimo relativo sono detti estremi liberi della funzione.

Esempi

- La funzione $F(x,y)=x^2+y^2$ ha 0 come minimo assoluto e il punto di minimo assoluto è (0,0) che è un punto stazionario
- Sia $D=\{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1\}$. La funzione $F: D \to \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ha 0 come minimo assoluto e tutti i punti di minimo assoluto sono punti di frontiera.

Esempio

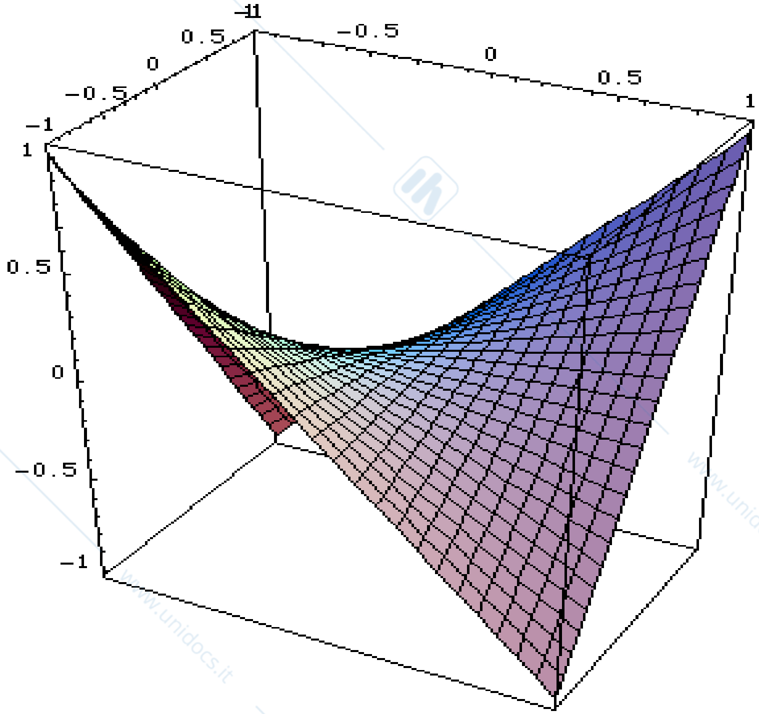
- La funzione

$$F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq\vec{0} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha 0 come minimo assoluto e il punto di minimo assoluto è un punto singolare

Il teorema di Fermat non è sufficiente

- Anche se un punto è stazionario non è detto che il punto sia un punto di massimo o minimo relativo.
- Ad esempio la funzione $F(x, y) = xy$ ha un punto stazionario in (0,0) ma questo punto non è né un massimo né un minimo relativo.


-1
-0.5
0
0.5
1

Punti di sella

- Un punto stazionario che non è un punto di massimo o minimo relativo è detto punto di sella.

Problema

- Come si fa a verificare tra i punti stazionari quali sono estremi liberi e quali sono punti di sella?

Forme quadratiche

- Un polinomio di secondo grado omogeneo in due variabili viene chiamato **Forma quadratica**.
- Come abbiamo visto una forma quadratica

$ah^2 + 2bhk + ck^2$ nelle variabili h,k si può scrivere come

$$(h,k)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Forme quadratiche definite positive

- Una forma quadratica $ah^2+2bhk+ck^2$ si dice
- definita positiva se $ah^2+2bhk+ck^2 \geq 0$ e

$ah^2+2bhk+ck^2=0$ se e solo se (h,k)=(0,0)

- definita negativa se $-(ah^2+2bhk+ck^2)$ è definita positiva

Forme quadratiche indefinite

- Una forma quadratica $ah^2+2bhk+ck^2$ si dice
- semidefinita positiva se

$$ah^2+2bhk+ck^2\geq 0$$

- semidefinita negativa se

$$-(ah^2+2bhk+ck^2)$$

è semidefinita positiva

- indefinita se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa

Forme quadratiche definite

- la forma quadratica $ah^2 + 2bhk + ck^2$ è definita positiva se e solo se $\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0$ e a>0

- la forma quadratica $ah^2 + 2bhk + ck^2$ è definita negativa se e solo se $\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0$ e a<0

Forme quadratiche indefinite

- La forma quadratica $ah^2 + 2bhk + ck^2$ è indefinita se e solo se

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} < 0$$

Applicazione agli estremi liberi

- Se (x_0, y_0) è un punto stazionario

$$F(x,y)-F(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(x-x_0,y-y_0)H(z)\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$

Se dimostriamo che la forma quadratica

$$(h,k)H(z)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$$

è definita positiva per (x,y) in un intorno di (x_0,y_0) , allora $F(x,y)-F(x_0,y_0)\geq 0$ e quindi (x_0,y_0) è un punto di minimo relativo.

Applicazione agli estremi liberi

Supponiamo che F sia di classe C^2,

det $H(x_0,y_0)>0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$

Allora, siccome

$$det\, H(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y)\right)^2 \text{ e } \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)$$

sono continue in un intorno di (x_0,y_0) e sono entrambe positive in (x_0,y_0), per il teorema di permanenza del segno rimangono positive in un intorno di (x_0,y_0).

Applicazione agli estremi liberi

In particolare det H(z)>0 e $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(z)>0$ e quindi la forma quadratica $(h,k)H(z)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ è definita positiva.

Abbiamo dimostrato che se F è di classe C^2, det $H(x_0,y_0)>0$ e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$$

allora il punto stazionario (x_0,y_0) è un punto di minimo relativo.

Applicazione agli estremi liberi

- In modo del tutto analogo si verifica che se (x_0, y_0) è un punto stazionario per F, F è di classe C^2, det $H(x_0,y_0)>0$ e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$$

allora (x_0,y_0) è un punto di massimo relativo.

Che succede se det $H(x_0,y_0)<0$?

- In questo caso si usa la formula di Taylor con resto di Peano:

$$F(x_0+th, y_0+tk)=F(x_0,y_0)+t\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)k\right)$$
$$+\frac{1}{2}t^2(h,k)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o(t^2)$$

Siccome il punto (x_0,y_0) è stazionario

$$F(x_0+th, y_0+tk)-F(x_0,y_0)=\frac{1}{2}t^2(h,k)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o(t^2)$$

det $H(x_0,y_0)<0$

- Siccome la forma quadratica $(h,k)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

è indefinita, esistono versori (h_0,k_0) e (h_1,k_1) tali che

$$(h_0,k_0)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix} h_0 \\ k_0 \end{pmatrix}>0 \qquad (h_1,k_1)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix} h_1 \\ k_1 \end{pmatrix}<0$$

det $H(x_0,y_0)<0$

- Quindi

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x_0+th_0,y_0+tk_0)-F(x_0,y_0)}{t^2}=\frac{1}{2}(h_0,k_0)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h_0\\k_0\end{pmatrix}>0$$

e

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x_0+th_1,y_0+tk_1)-F(x_0,y_0)}{t^2}=\frac{1}{2}(h_1,k_1)H(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h_1\\k_1\end{pmatrix}<0$$

per cui, se t è abbastanza piccolo

$$F(x_0+th_0,y_0+tk_0)-F(x_0,y_0)>0 \quad F(x_0+th_1,y_0+tk_1)-F(x_0,y_0)<0$$

det $H(x_0,y_0)<0$

Ne segue che (x_0,y_0) è un punto di sella. Abbiamo dimostrato che se F è di classe C^2 e det $H(x_0,y_0)<0$ allora (x_0,y_0) è un punto di sella.

Test della matrice hessiana

- Teorema: Sia $F : D \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili avente derivate parziali seconde continue in un intorno di un punto stazionario (x_0,y_0). Sia $H(x_0,y_0)$ la matrice hessiana di F in (x_0,y_0). Allora
- se $\det H(x_0,y_0)>0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$ allora (x_0,y_0) è un punto di minimo.
- se $\det H(x_0,y_0)>0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$ allora (x_0,y_0) è un punto di massimo.

Test della matrice hessiana

- se det $H(x_0,y_0)<0$ allora (x_0,y_0) è un punto di sella.
- se det $H(x_0,y_0)=0$ allora il test non è decisivo.

det $H(x_0,y_0)=0$

- Per dimostrare che il test della matrice hessiana non è conclusivo se det $H(x_0,y_0)=0$, basta studiare le funzioni

$$F_1(x,y)=x^4+y^4 \qquad F_2(x,y)=-x^4-y^4 \qquad F_3(x,y)=x^4-y^4$$

Esercizio

- Calcolare e classificare i punti stazionari della funzione $F: R^2 \to R$ definita ponendo

$$F(x, y) = x^3 + xy + y^2 - 1$$

Esercizio

- Calcolare e classificare i punti stazionari della funzione $F : R^2 \rightarrow R$ definita ponendo

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2 y + y^2$$

Esercizio

- Calcolare i punti di massimo assoluto della funzione $F : R^2 \to R$ definita ponendo

$$F(x, y) = (x^2 + 1)e^{-x^2 - y^2}$$

Esempio

- Dati n punti nel piano di coordinate

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

si consideri la funzione $F : R^2 \to R$ definita ponendo

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (y - y_i)^2$$

Calcolare i punti di minimo relativo di F.

Epigrafico di una funzione

- La regione nello spazio che sta sopra il grafo di una funzione F è detta epigrafico della funzione. In simboli:

$$\text{epi}\, F = \{(x, y, z) | z \geq F(x, y)\}$$

Funzioni convesse e concave

- Una funzione (definita in un dominio D convesso) si dice convessa se epiF è convesso.
- Una funzione (definita in un dominio D convesso) si dice concava se -F è convessa.

Convessità e piano tangente

- Teorema:

Se F è di classe C^1 definita su un aperto D convesso allora F è convessa se e solo se per ogni coppia di punti $P_0, \; P$

$$F(P) \geq F(P_0) + \nabla F(P_0) \cdot (P - P_0)$$

è concava se e solo se

$$F(P) \leq F(P_0) + \nabla F(P_0) \cdot (P - P_0)$$

Convessità e matrice hessiana

- Corollario 1:
- Se il differenziale secondo di F è semidefinito positivo in tutto il dominio della funzione allora la funzione è convessa.
- Se il differenziale secondo è semidefinito negativo in tutto il dominio della funzione allora la funzione è concava.

Ottimizzazione di funzioni convesse

- Corollario 2:
- Se P_0 è un punto stazionario di una funzione convessa allora è un punto di minimo assoluto
- Se F è concava allora P_0 è un punto di massimo assoluto

Dimostrazione del corollario 2

Se F è convessa e P è un punto qualsiasi del dominio, allora

$$F(P) \geq F(P_0) + \nabla F(P_0) \cdot (P - P_0)$$

ma, siccome P_0 è stazionario, $\nabla F(P_0) = \vec{0}$ e quindi

$$F(P) \geq F(P_0)$$

Esempio

- Dati n punti nel piano di coordinate

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

si consideri la funzione $F : R^2 \rightarrow R$
definita ponendo

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (y - y_i)^2$$

Calcolare i punti di minimo assoluto di F.

Retta di regressione

- Supponiamo di avere n osservazioni congiunte di due grandezze (x,y)

$$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$$

- La retta di regressione è la retta di equazione y=ax+b che meglio approssima le osservazioni

Vogliamo cioè che

$$\Sigma_{i=1}^{n}(a x_i + b - y_i)^2$$

sia minimo

Varianza e covarianza

- Introduciamo le medie aritmetiche dei valori x_i e y_i

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

- La varianza della variabile x è

$$\sigma_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2$$

- La covarianza delle variabili x e y è

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)(\bar{y}-y_i)$$

Formule per varianza e covarianza

- Introduciamo le medie aritmetiche

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

- Abbiamo che

$$\sigma_x^2 = \bar{q} - \bar{x}^2 \qquad \sigma_{xy} = \bar{p} - \bar{x}\,\bar{y}$$

Esercizio

- Verificare che la retta di regressione delle osservazioni

$$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$$

è

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$$