

LEZIONE 1: OSCILLAZIONI

DAVIDE PAGANO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

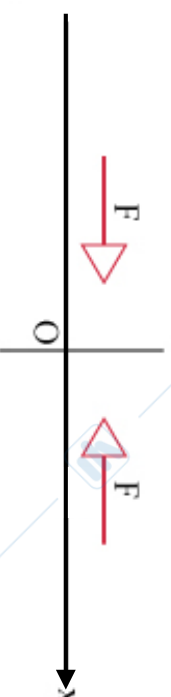
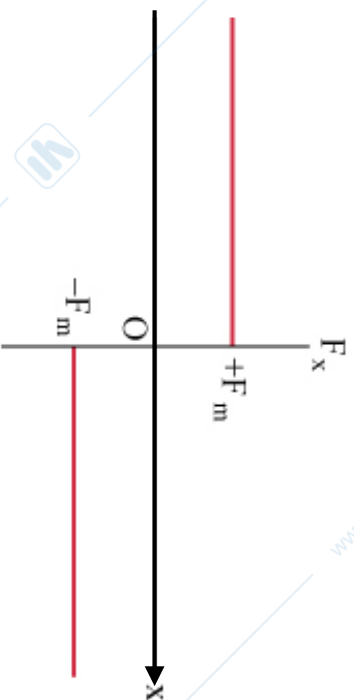
FISICA SPERIMENTALE (OTTICA ONDE)

A.A. 2017/2018

LA FORZA DI RICHIAMO

- ▶ Consideriamo una particella di massa m vincolata a muoversi lungo l'asse x soggetta ad una forza \vec{F} tale che

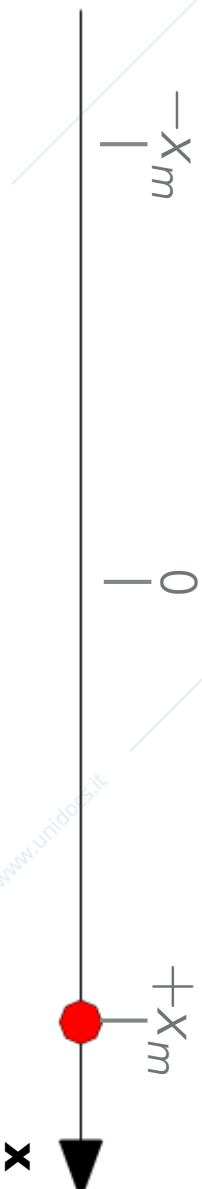
forza di richiamo costante



- ▶ Una forza di questo tipo è detta forza di richiamo in quanto tende a richiamare il punto materiale nella posizione di equilibrio $x = 0$
- ▶ All'istante iniziale la particella viene posta in $x = +x_m$ che succede?

LA FORZA DI RICHIAMO

- ▶ In assenza di attrito (e di altre forze dissipative) il ciclo si ripete indefinitamente



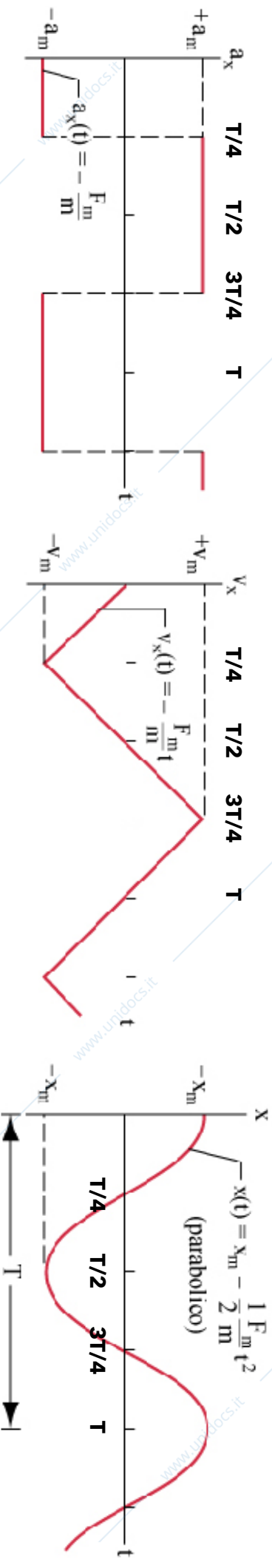
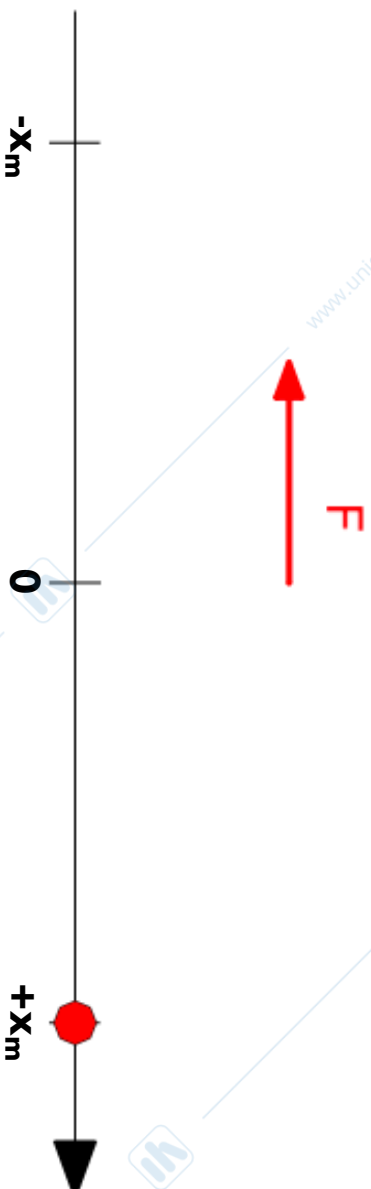
- ▶ Il massimo valore del modulo della distanza della particella dalla **posizione di equilibrio** è detta ampiezza o elongazione
- ▶ Il tempo T impiegato dalla particella per compiere un ciclo completo è detto periodo \longrightarrow frequenza $\nu = 1/T$ [Hz]

LEZIONE 1: OSCILLAZIONI

LA FORZA DI RICHIAMO

- Alcune considerazioni dinamiche...

$$t = 0.00T$$



accelerazione

velocità

posizione

LA FORZA DI RICHIAMO

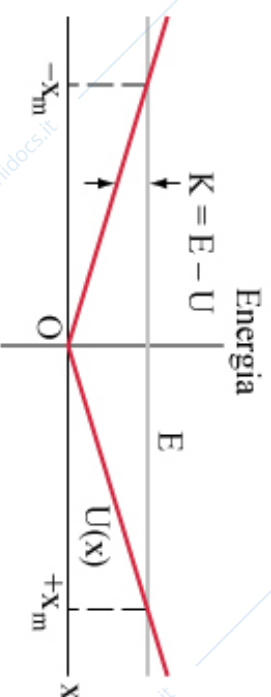
- ▶ Alcune considerazioni energetiche...
- ▶ Nel corso del primo anno è stato introdotto il concetto di energia potenziale U , associata alla configurazione di un sistema
- ▶ Possiamo definire U solo in presenza di forze conservative

$$F = -\frac{dU}{dx}$$



$$U = -Fx$$

forza di richiamo costante



- ▶ $E = K + U$ si conserva in un **sistema isolato** per cui $K = E - U$

L'OSCILLATORE ARMONICO

LEZIONE 1: OSCILLAZIONI

L'OSCILLATORE ARMONICO - INTRODUZIONE

- ▶ Che cosa hanno in comune fenomeni come l'oscillazione di una massa attaccata ad una molla, le vibrazioni degli elettroni in un atomo che emettono luce, il funzionamento di un termostato, la crescita di una colonia di batteri, etc...?

- ▶ Tutti questi fenomeni sono descritti da equazioni molto simili...

- ▶ Queste equazioni sono chiamate equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

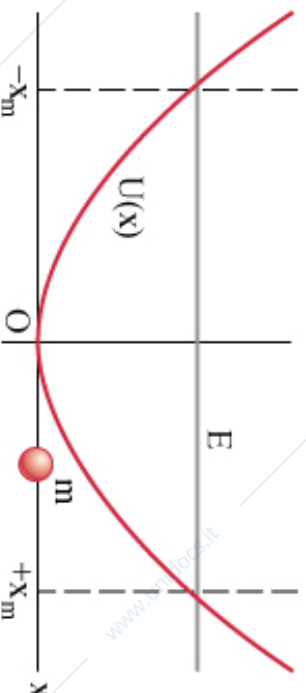
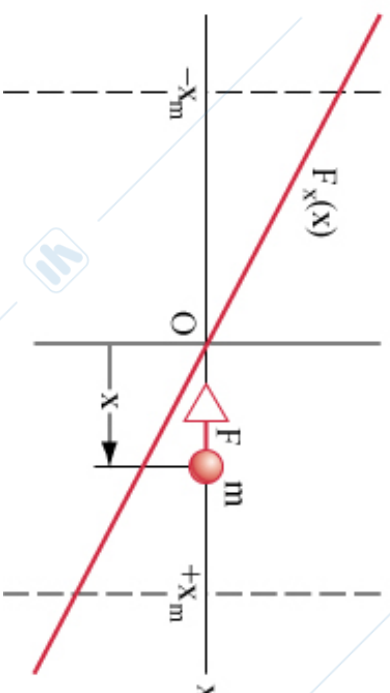
L'OSCILLATORE ARMONICO - INTRODUZIONE

- ▶ L'oscillatore armonico è uno dei fenomeni più semplici descritti da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti
- ▶ Un oscillatore armonico è un sistema che se perturbato dalla posizione di equilibrio risente di una forza di richiamo proporzionale allo spostamento
- ▶ Moti oscillatori più complessi possono essere descritti come la sovrapposizione di oscillazioni armoniche
- ▶ Più in generale, in moltissimi casi, sistemi che sono debolmente perturbati dalla loro posizione di equilibrio si comportano come oscillatori armonici

L'OSCILLATORE ARMONICO - INTRODUZIONE

- ▶ Consideriamo una particella di massa m sottoposta ad una forza del tipo $F_x(x) = -kx$

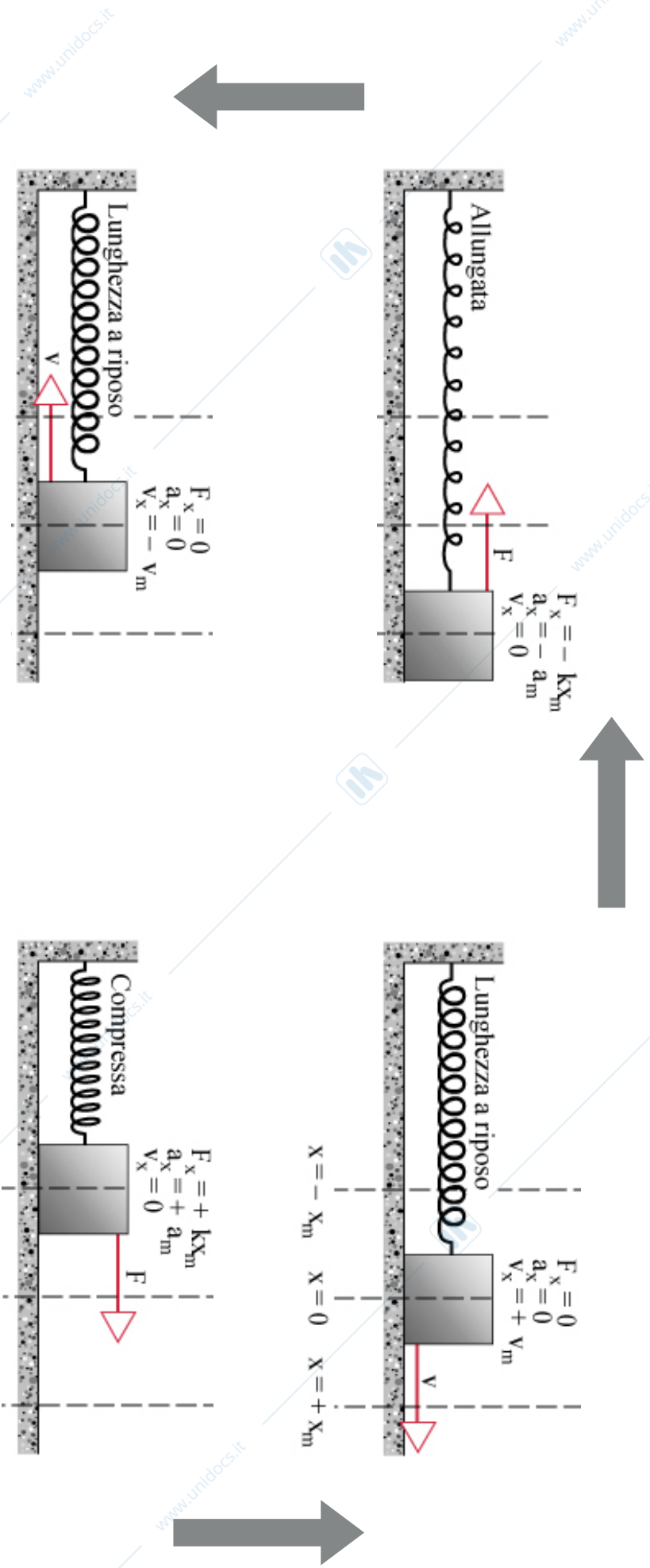
Forza di richiamo lineare



$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

L'OSCILLATORE ARMONICO - INTRODUZIONE

- ▶ Che non è altro che il caso di corpo di massa m sottoposto all'azione di una molla ideale di costante k (in assenza di attrito)



L'OSCILLATORE ARMONICO - EQUAZIONE DEL MOTO

$$\sum F_x = \max \longrightarrow -kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \longrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Equazione del moto armonico semplice

- ▶ Che soluzioni ammette? ...iniziamo col caso $\frac{k}{m} = 1$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \longrightarrow \sin(t) \text{ e } \cos(t) \text{ verificano questa relazione}$$

$$\text{▶ Infatti } x = \cos(t) \longrightarrow \frac{dx}{dt} = -\sin(t) \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos(t) = -x$$

- ▶ Come teniamo in conto però del termine costante $\frac{k}{m}$?

L'OSCILLATORE ARMONICO - EQUAZIONE DEL MOTO

▶ Vogliamo trovare le soluzioni per $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$

▶ Potremmo pensare di moltiplicare $\cos(t)$ per una qualche costante

$$x = A \cos(t) \longrightarrow \frac{dx}{dt} = -A \sin(t) \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -A \cos(t) = -x$$

▶ Non abbiamo risolto il problema ma abbiamo scoperto che **moltiplicando per una costante una soluzione è ancora soluzione**

▶ Proviamo a moltiplicare per una costante la variabile t

$$x = \cos(\omega t) \longrightarrow \frac{dx}{dt} = -\omega \sin(\omega t) \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x$$



L'OSCILLATORE ARMONICO - EQUAZIONE DEL MOTO

- ▶ Scegliendo ω opportunamente $x = \cos(\omega t)$ è una soluzione
- ▶ Ma allora anche $x = x_m \cos(\omega t)$ è soluzione
- ▶ Verifichiamo, infine, che anche $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$ è soluzione
- ▶ Sostituiamo la soluzione **generale** appena trovata nell'equazione del moto armonico semplice

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \longrightarrow \quad -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{k}{m} x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- ▶ Da cui necessariamente $\omega^2 = \frac{k}{m}$ \longrightarrow $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ **pulsazione naturale**

L'OSCILLATORE ARMONICO - EQUAZIONE DEL MOTO

- ▶ x_m e φ sono invece arbitrarie

- ▶ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ descrive tutti i possibili moti armonici fissato ω

- ▶ Per individuare un particolare moto armonico devo fissare le condizioni iniziali del moto (posizione e velocità) che determinano univocamente i valori di x_m e φ

- ▶ Se in $x_m \cos(\omega t + \varphi)$ applichiamo la sostituzione $t \rightarrow t + \frac{2\pi}{\omega}$

$$x_m \cos \left[\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \varphi \right] \rightarrow x_m \cos (\omega t + \varphi + 2\pi) \rightarrow x_m \cos (\omega t + \varphi)$$

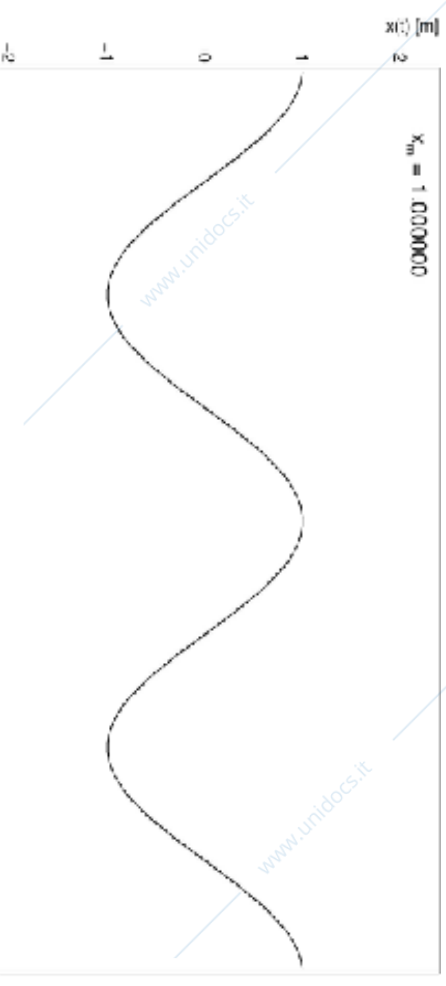
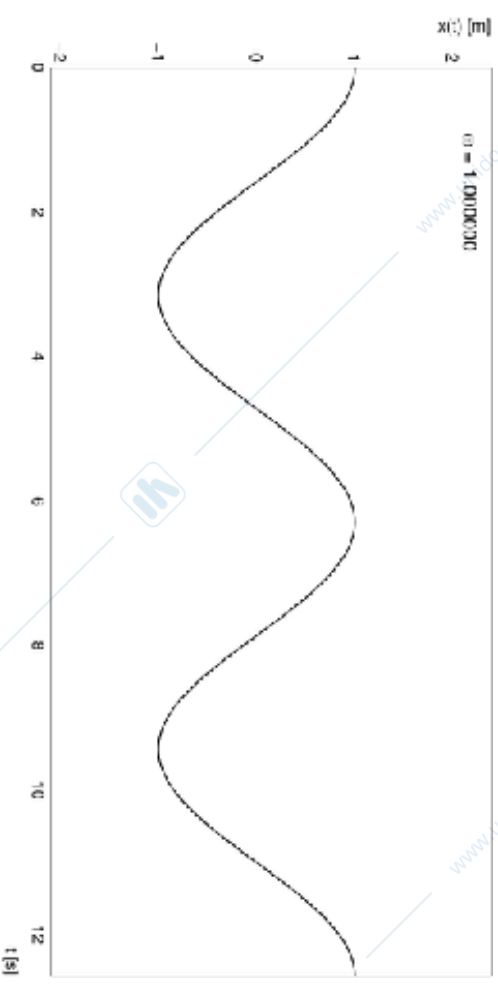
L'OSCILLATORE ARMONICO - PULSAZIONE

- ▶ Dopo un tempo $\frac{2\pi}{\omega}$ $x(t)$ assume lo stesso valore (per ogni t), che è proprio la definizione del periodo

$$\blacktriangleright T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

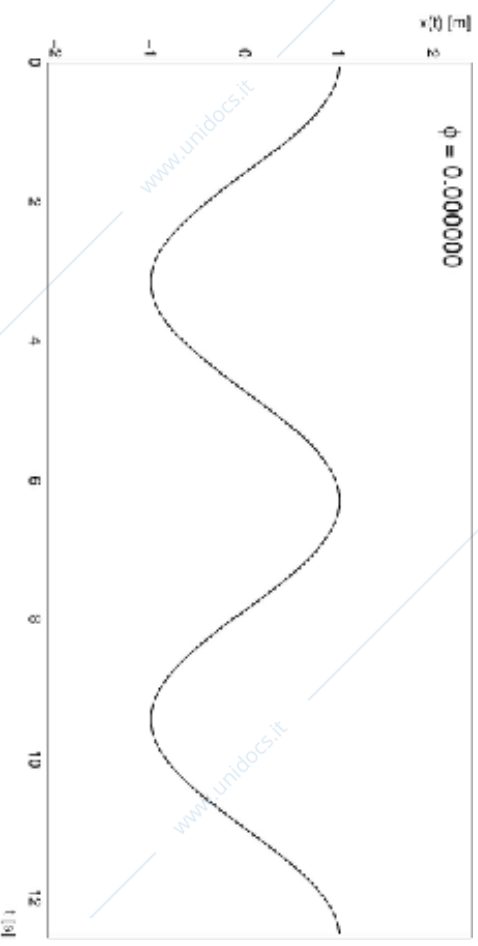
- ▶ ω è detta pulsazione o frequenza angolare $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

- ▶ x_m è l'ampiezza è l'ampiezza dell'oscillazione

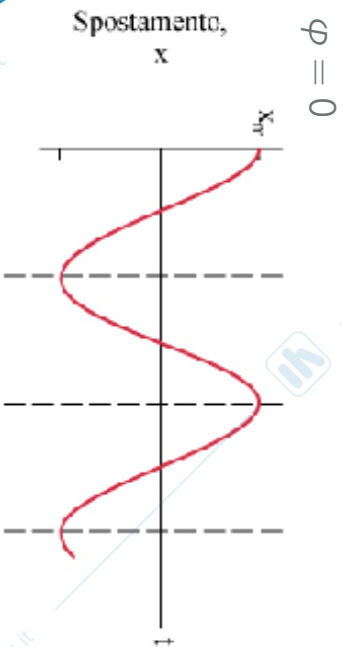


L'OSCILLATORE ARMONICO - FASE

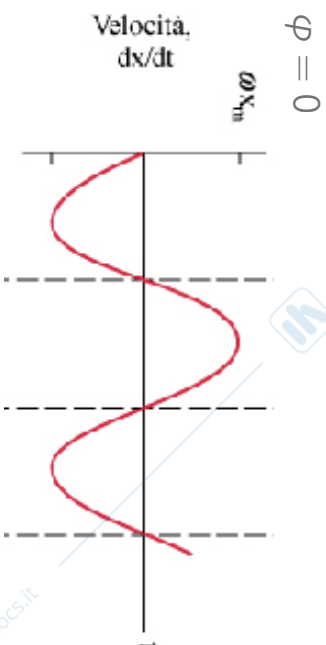
► $\omega t + \varphi$ è detta fase del moto e φ è detta costante di fase o fase iniziale



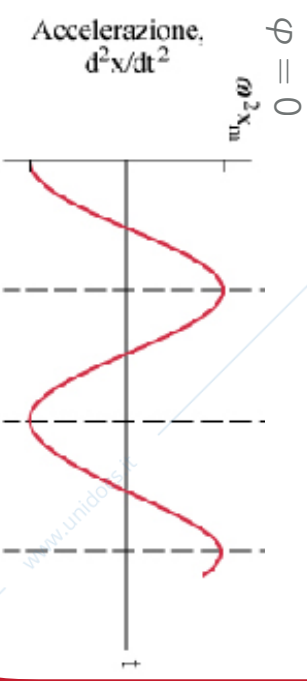
► $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$



$v = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$



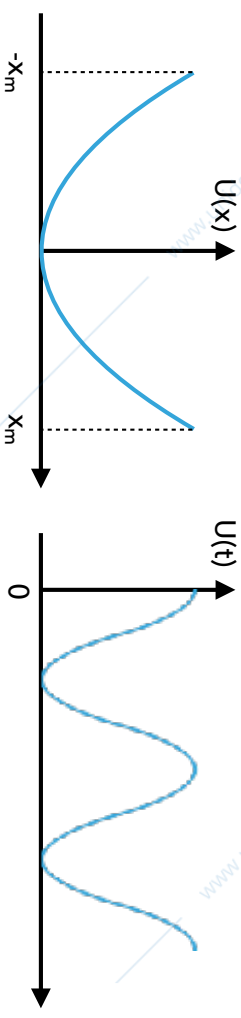
$a = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi)$



L'OSCILLATORE ARMONICO - ENERGIA

- ▶ In assenza di forze dissipative $E = U + K$ si conserva

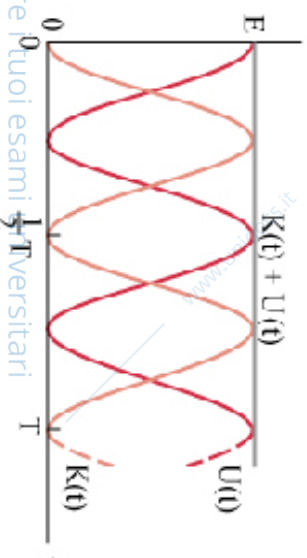
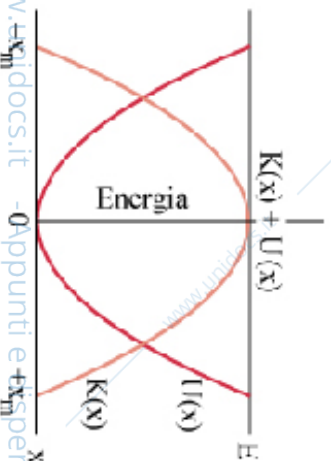
$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$



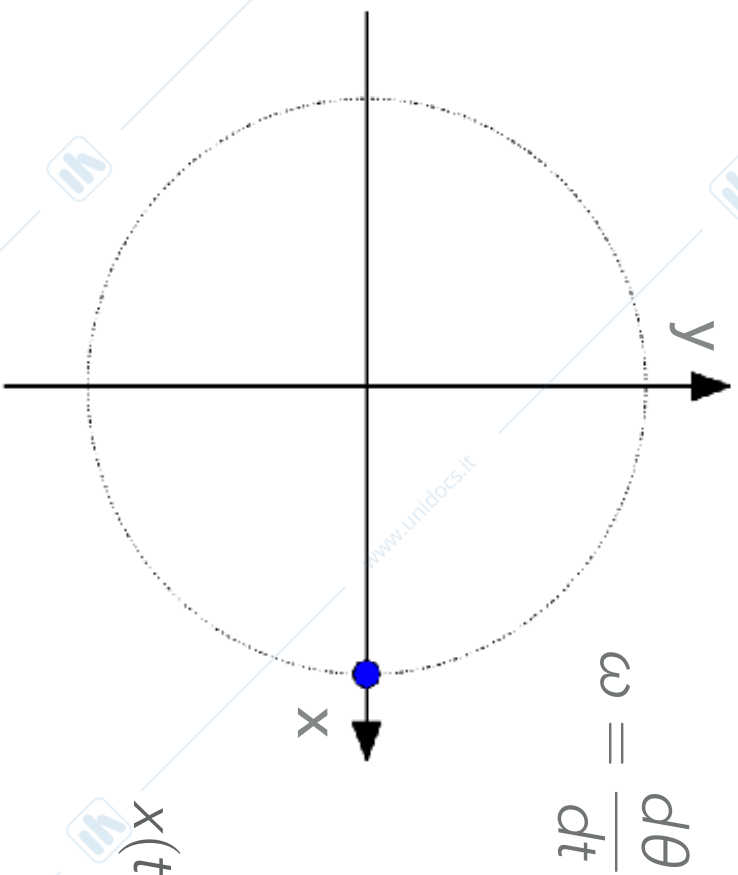
$$K = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E = U + K = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k x_m^2$$

costante



L'OSCILLATORE ARMONICO - MOTO CIRCOLARE UNIFORME



$$x(t) = R \cos(\omega t + \varphi)$$

- ▶ Il moto armonico semplice può essere ottenuto dalla proiezione di un moto circolare uniforme lungo un diametro del cerchio
- ▶ Analogamente un moto circolare uniforme può essere visto come la composizione di due moti armonici lungo assi ortogonali

LEZIONE 1: OSCILLAZIONI

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

19



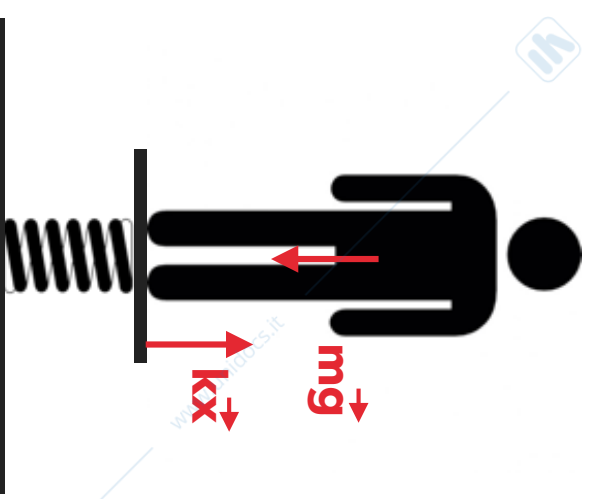
LEZIONE 1: OSCILLAZIONI

20



LA MISURA DELLA MASSA

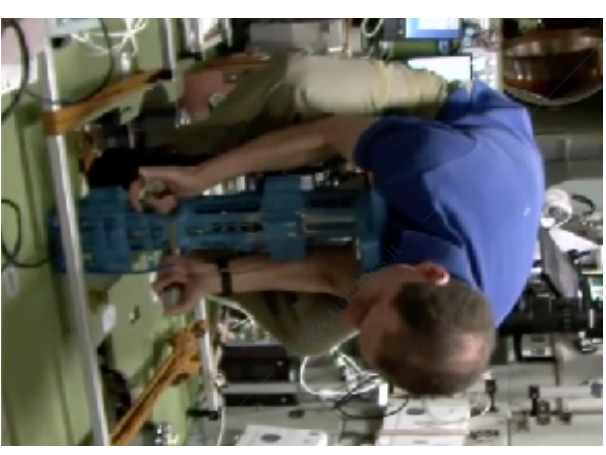
- ▶ La misura della massa (inerziale) sulla Terra
- ▶ Ma su una stazione orbitante attorno alla Terra?



- ▶ In un moto armonico semplice $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

- ▶ Dalla misura del periodo di oscillazione del sistema qui a lato è possibile misurare la massa (inerziale) dell'astronauta

- ▶ Tipicamente è possibile raggiungere precisioni dell'ordine dello 0.1%



APPLICAZIONI DEL MOTO ARMONICO

LEZIONE 1: OSCILLAZIONI

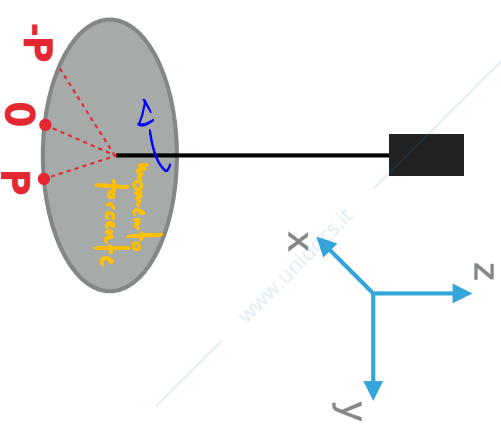
BILANCIA DI TORSIONE

- ▶ Ruotando il disco di un piccolo angolo θ il filo esercita un momento torcente proporzionale a θ

Legge di Hooke $T_z = -k\theta$

Forza di richiamo

costante di torsione del filo



- ▶ È una torsione di richiamo (come il segno – evidenzia) pertanto il moto risultante sarà un moto armonico angolare semplice

- ▶ $\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$ (analogo rotazionale di $\vec{F} = m\vec{a}$) $\rightarrow T_z = -k\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$

- ▶ L'equazione $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$ è analoga a $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

BILANCIA DI TORSIONE

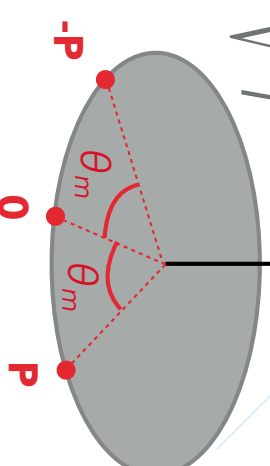
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

θ spostamento angolare	x spostamento lineare
I momento d'inerzia	m massa
k costante di torsione	k costante elastica (caso forza elastica molla)

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0 \rightarrow \theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$ *angolo con x_m* con $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$ \rightarrow dalla misura T si può calcolare I



BILANCIA DI TORSIONE DI COULOMB

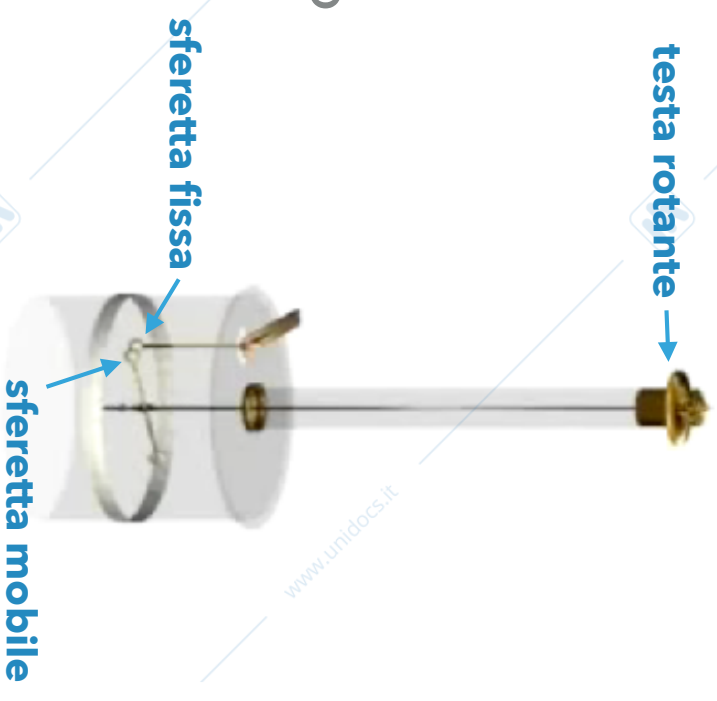
- ▶ Le due sfere conduttrici vengono caricate elettricamente con carica dello stesso segno

- ▶ All'equilibrio $\sum T_z = 0 \rightarrow |T_{z,c}| = |T_{z,t}|$

- ▶ $|T_{z,t}| = k\theta$ mentre $|T_{z,c}| = F_c r$ dove r è il braccio della forza

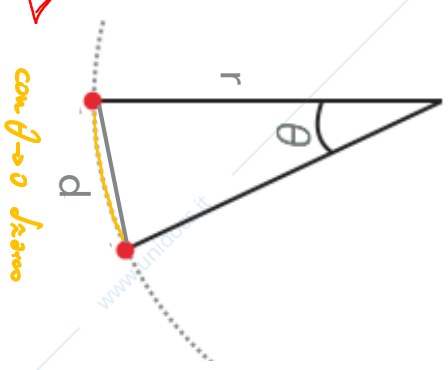
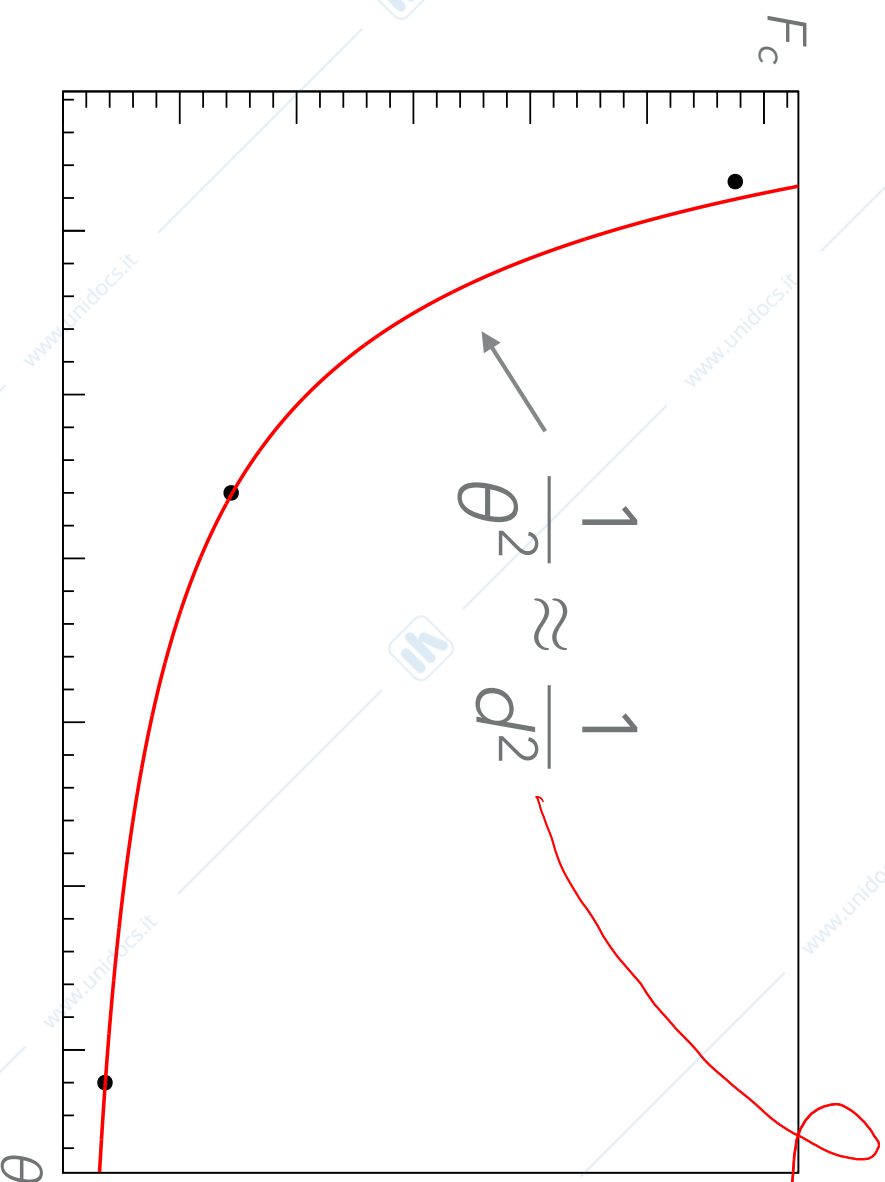
- ▶ Coulomb poteva avvicinare le sfere torcendo ulteriormente il filo agendo sulla testa rotante della bilancia di torsione

- ▶ In questo modo si ottiene una nuova configurazione di equilibrio



BILANCIA DI TORSIONE DI COULOMB

- ▶ La dipendenza di F_c da d è la stessa di F_c da θ



- ▶ Non perfetta descrizione per piccole distanze...come mai?

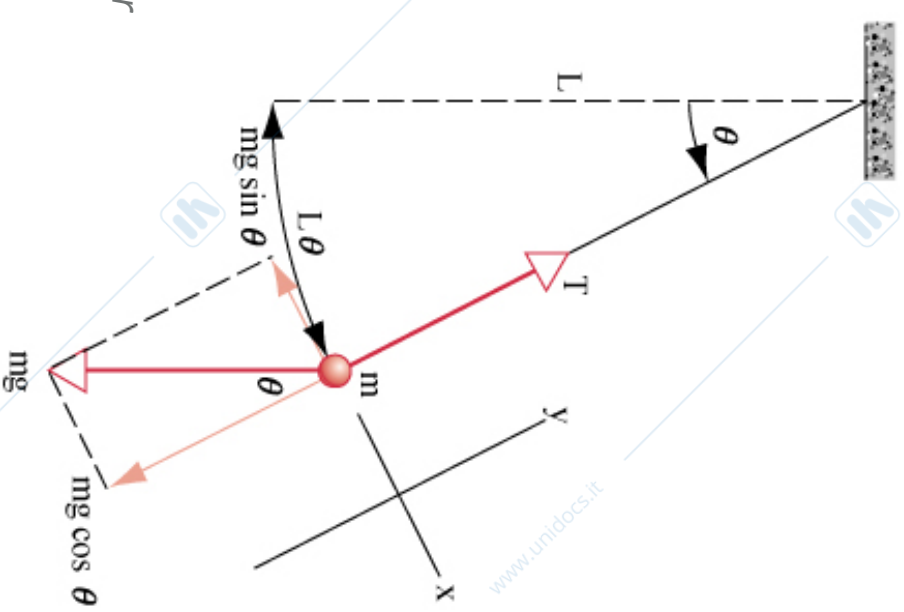
IL PENDOLO SEMPLICE

- ▶ Particella di massa m sospesa ad un filo inestensibile di massa nulla

- ▶ Il moto della particella avviene lungo una circonferenza di raggio L

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \longrightarrow \begin{cases} -mg\cos(\theta) + T = ma_{centr} \\ -mg\sin(\theta) = ma_{tang} \end{cases}$$

- ▶ La componente radiale della forza risultante fornisce l'accelerazione centripeta che permette il moto lungo una circonferenza, mentre quella tangenziale costituisce la **forza di richiamo**



- ▶ La forza di richiamo $F_x = -mg\sin(\theta)$ non è $\propto \theta$ **non è armonico semplice**

IL PENDOLO SEMPLICE

- ▶ Tuttavia per piccoli angoli $\theta \approx \sin(\theta)$

$$F_x = -mg\theta = -mg \frac{x}{L} = - \left(\frac{mg}{L} \right) x$$

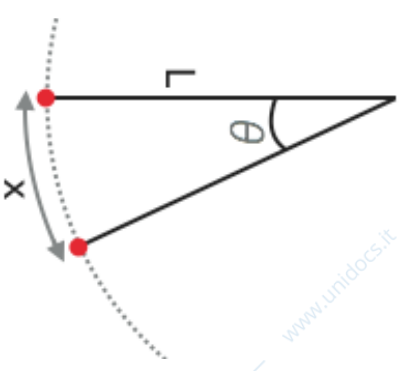
k

- ▶ F_x diventa una forza di richiamo lineare

- ▶ Abbiamo visto che in un moto armonico semplice

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- ▶ Il periodo non dipende dalla massa e dall'ampiezza



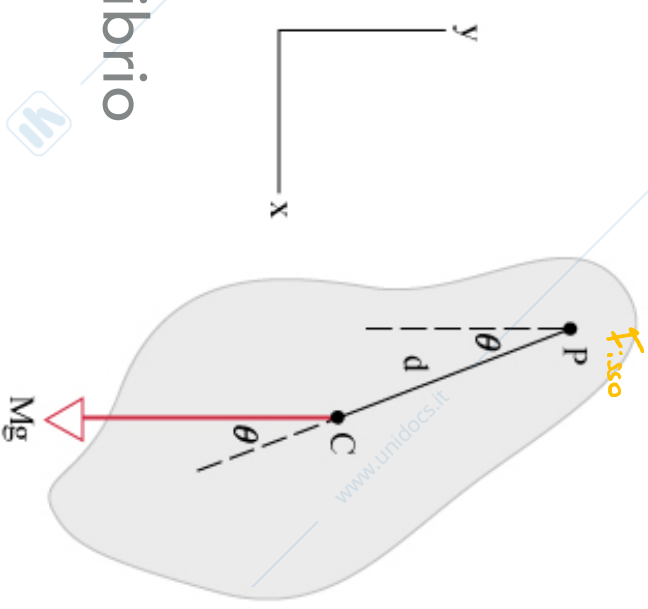
IL PENDOLO FISICO

- ▶ Un pendolo fisico (o composto) è un corpo rigido incernierato in modo che possa ruotare attorno ad un asse

- ▶ Ruotato di un angolo θ dalla posizione di equilibrio risente di un momento torcente di richiamo

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \quad \longrightarrow \quad \tau_z = -Mgd \sin(\theta)$$

- ▶ Per piccoli angoli $\tau_z = -\boxed{Mgd}\theta$ **moto armonico angolare semplice**



- ▶ Abbiamo già trovato che $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}$ \longrightarrow $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$

IL PENDOLO FISICO

- ▶ Dall'equazione precedente è possibile ricavare il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione

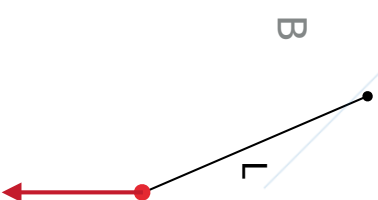
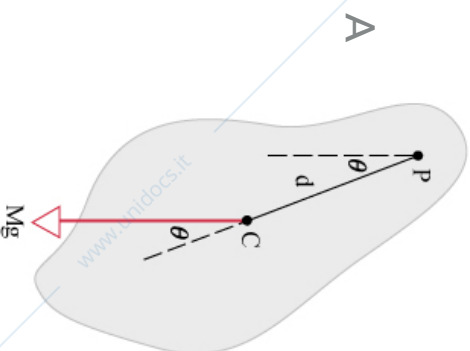
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} \longrightarrow I = \frac{T^2 Mgd}{4\pi^2}$$

- ▶ Il pendolo semplice è un caso particolare del pendolo fisico

$$I = ML^2 \quad d = L \longrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} \longrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{ML^2}{MgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- ▶ Dato un pendolo fisico A ci chiediamo quale lunghezza debba avere un pendolo semplice B affinché abbia lo stesso periodo di A

IL PENDOLO FISICO



$$T_A = T_B$$

$$2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$L = \frac{I}{Md}$$

lunghezza ridotta

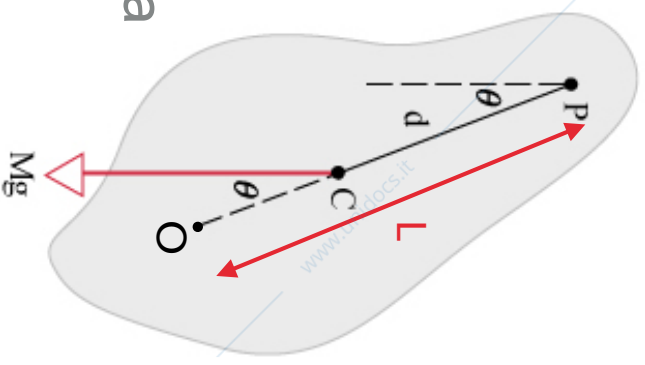
- ▶ La lunghezza ridotta stabilisce un'equivalenza (con riferimento al periodo) tra un pendolo semplice ed uno fisico

- ▶ Ma c'è dell'altro...

IL PENDOLO FISICO

- ▶ Sia O il punto sulla la retta passante per l'asse di rotazione ed il centro di massa distante L da P

▶ O è chiamato centro di oscillazione, dipende dalla scelta dell'asse di rotazione e gode di 2 importanti proprietà

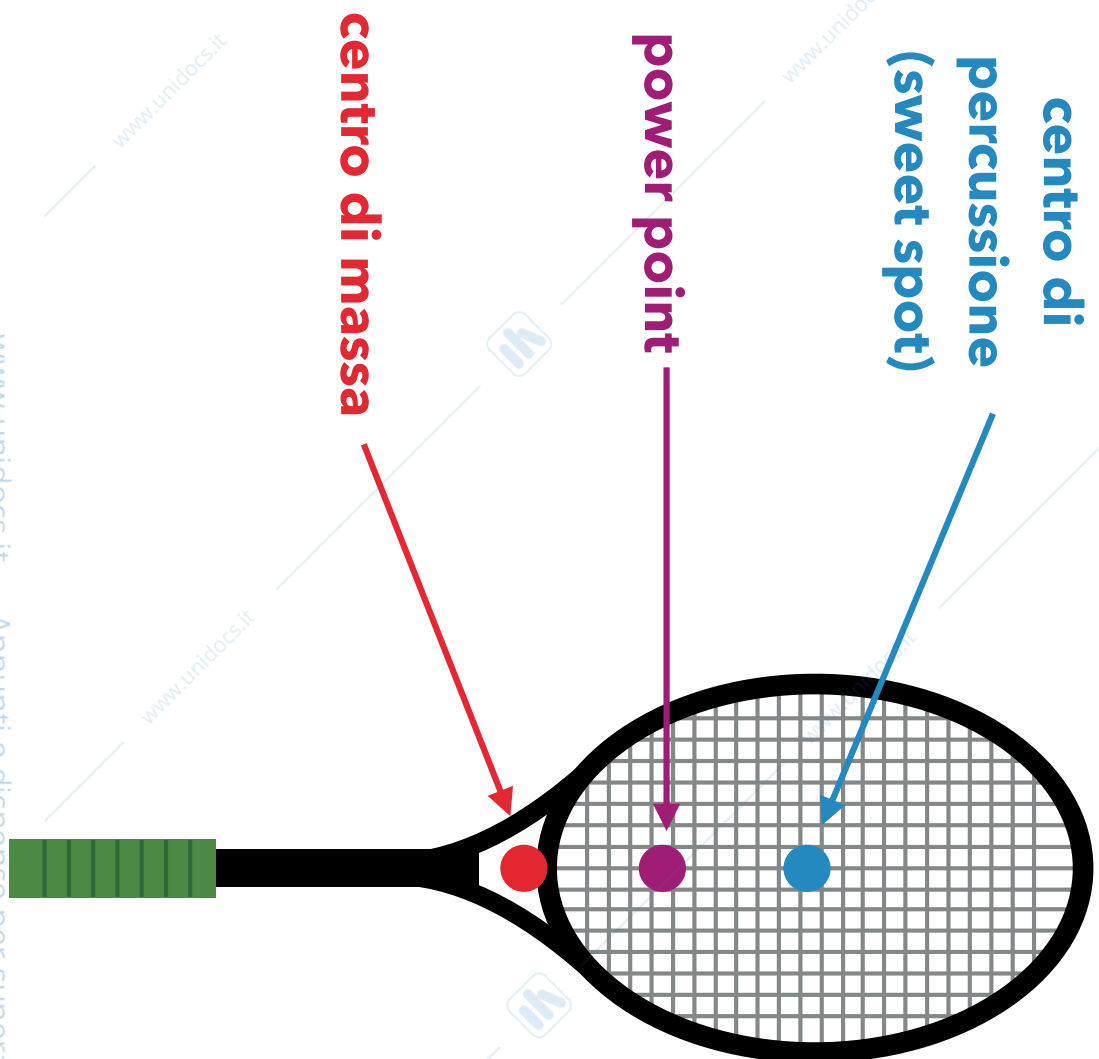


1. Se facciamo oscillare il pendolo rispetto all'asse parallelo al precedente ma passante per O il periodo non cambia
2. Forze impulsive parallele al piano di oscillazioni e applicate al centro di oscillazione non hanno effetti sull'asse di rotazione (centro di percussione)



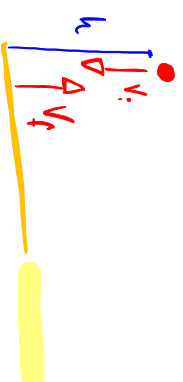


LA RACCHETTA DA TENNIS...



Il power point ha il massimo valore del coefficiente di restituzione

$$e = \frac{V_f}{V_i}$$



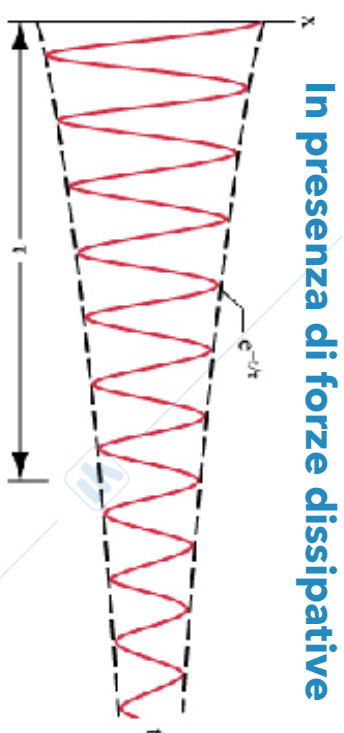
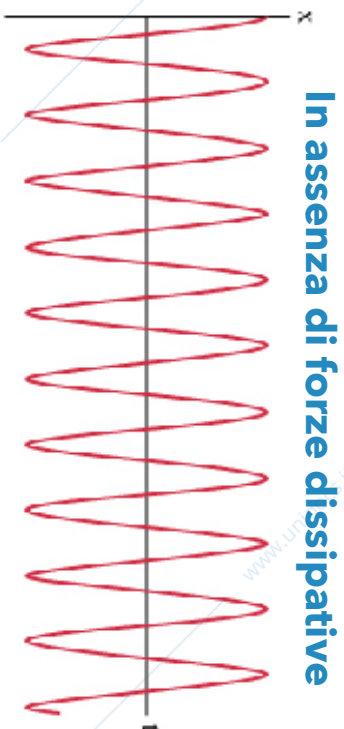
30/6

MOTO ARMONICO SMORZATO

LEZIONE 1: OSCILLAZIONI

MOTO ARMONICO SMORZATO

- ▶ In generale un sistema oscillante risente dell'azione di forze d'attrito che determinano uno smorzamento delle oscillazioni



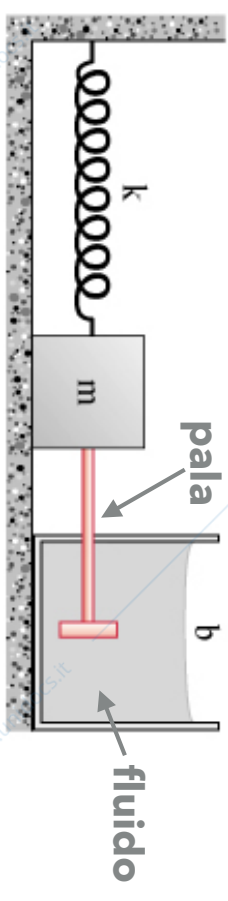
- ▶ L'effetto di forze dissipative sul periodo è di norma molto piccolo
- ↳ *aggisce sull'ampiezza?*
- ▶ In molti casi reali si può tener conto dello smorzamento introducendo un termine esponenziale nella legge oraria:

$$x(t) = X_m e^{-t/T} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = \text{costante temporale di smorzamento}$$

MOTO ARMONICO SMORZATO

- ▶ Consideriamo il sistema in figura



- ▶ Durante il moto la pale risente della resistenza del mezzo $F_x^{att} = -bv_x$

- ▶ $b (> 0)$ è chiamata coefficiente di smorzamento che dipende sia dal fluido che dalle caratteristiche della pala ↳ + bassa viscosità

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x \longrightarrow \boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0}$$

- ▶ Le soluzioni dell'equazione precedente sono in generale della forma

$$X = e^{-\tau t}$$

MOTO ARMONICO SMORZATO

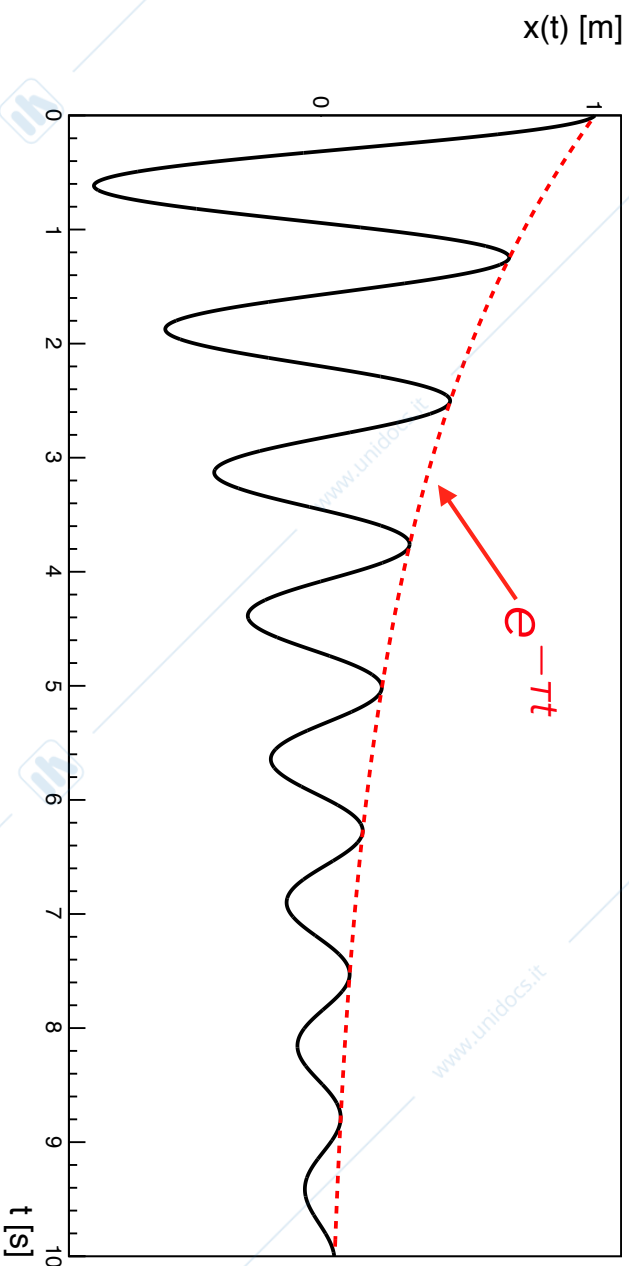
- ▶ Per b piccolo la soluzione dell'equazione del moto armonico smorzato diventano del tipo

$$x(t) = X_m e^{-bt/(2m)} \cos(\omega' t + \varphi) \quad \text{con} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

- ▶ È l'equazione di un moto armonico semplice con un termine di smorzamento dell'ampiezza $e^{-\tau t}$ dove $\tau = -b/(2m)$

- ▶ In queste condizioni $\omega' < \omega$ e il moto è detto sottosmorzato

MOTO ARMONICO SMORZATO



$$X_m = 1 \text{ m}$$

$$T = 0.3 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega' = 5 \text{ rad/s}$$

- ▶ Per smorzamenti grandi, la descrizione precedente non vale più: la forza di smorzamento infatti impedisce del tutto le oscillazioni

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

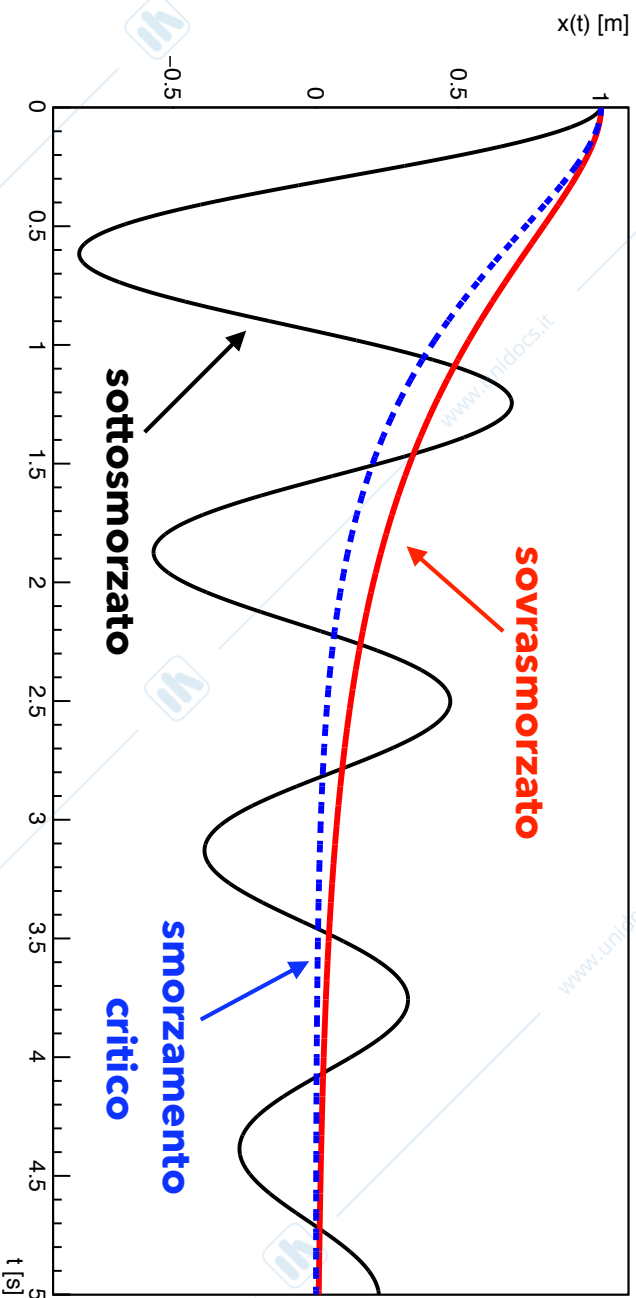
se $(b/2m)^2 > k/m$



ω' **non è reale**

MOTO ARMONICO SMORZATO

- ▶ Se $(b/2m)^2 > k/m$ il moto risultante è detto **sovrasmorzato**

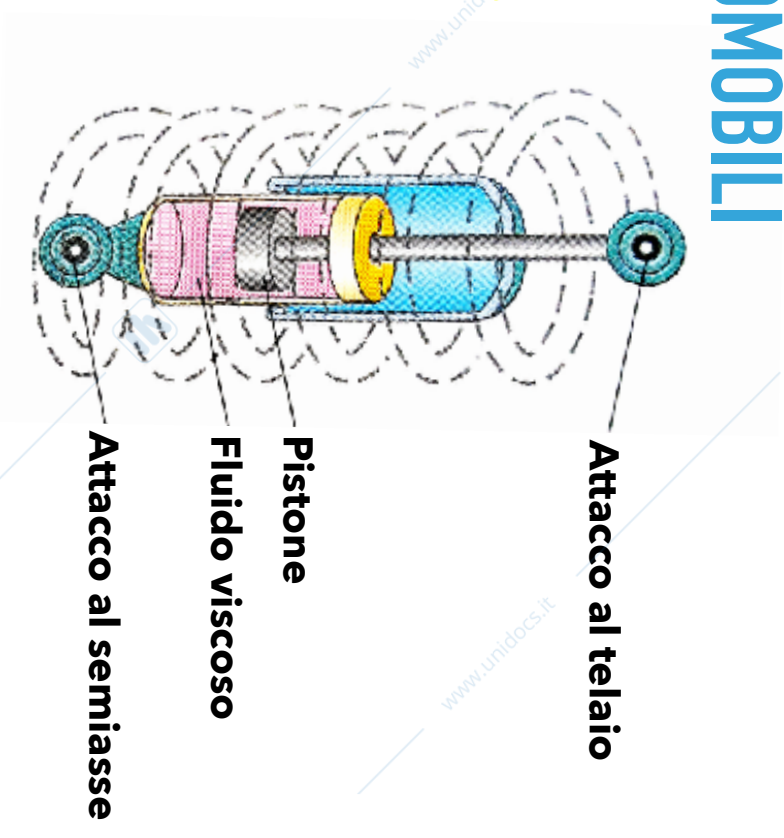


- ▶ Infine se $(b/2m)^2 = k/m$ si parla di **smorzamento critico**
- ▶ Ancora **non oscilla** ma **si avvicina alla posizione di equilibrio più rapidamente dell'oscillatore sovrasmorzato**



GLI AMMORTIZZATORI DELLE AUTOMOBILI

- ▶ Gli **ammortizzatori** delle automobili sono di norma progettati **per avere uno smorzamento critico**
- ▶ Col tempo **l'usura determina** un loro **sottosmorzamento**
- ▶ Come risultato la macchina ondeggia su e giù per effetto persino di piccole imperfezioni del manto stradale



LEZIONE 1: OSCILLAZIONI

OSCILLAZIONI FORZATE

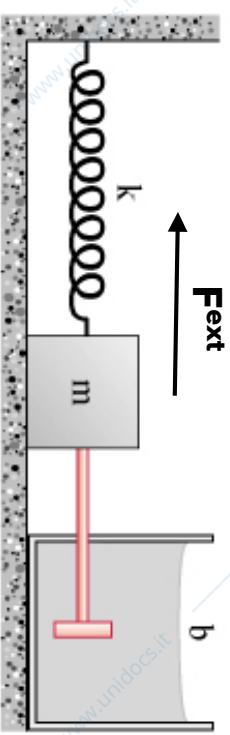
OSCILLAZIONI FORZATE

- ▶ Un oscillatore smorzato finisce per arrestarsi quando tutta la sua energia meccanica si è dissipata
- ▶ A meno che non vi sia una forza esterna che fornisca altra energia
- ▶ Si parla in questo caso di oscillazioni forzate, ovvero oscillazioni prodotte e mantenute da una forza esterna o forza eccitatrice
- ▶ Oscillazioni in sistemi meccanici o elettrici sono nella maggior parte dei casi oscillazioni forzate: un genitore che spinge un bambino sull'altalena, le oscillazioni di un cristallo di quarzo in un orologio, le oscillazioni di edifici per l'azione del vento, etc...

OSCILLAZIONI FORZATE

- ▶ Consideriamo il caso semplice di una forza eccitatrice del tipo

$$F_x^{\text{ext}} = F_m \cos(\omega''t)$$



- ▶ $\sum F_x = -kx - bv_x + F_m \cos(\omega''t) = ma_x$ che porta all'equazione

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos(\omega''t)$$

- ▶ La soluzione generale della precedente è formata da due termini:

1 *soluzione transitoria*

2 *soluzione stazionaria*

OSCILLAZIONI FORZATE

- ▶ La soluzione transitoria è la soluzione di un oscillatore armonico smorzato, quindi del tipo $x(t) = X_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$
- ▶ La sua espressione dipende dalle condizioni iniziali
- ▶ Dopo un certo tempo il suo contributo si annulla
- ▶ La soluzione stazionaria è dovuta alla forza esterna e persiste anche dopo che la soluzione transitoria si è annullata
- ▶ La sua espressione dipende dalla forza eccitatrice

OSCILLAZIONI FORZATE

- ▶ Dopo un tempo abbastanza lungo da annullare l'effetto transitorio la soluzione dell'equazione $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos(\omega''t)$ è:

$$x(t) = \frac{F_m}{G} \cos(\omega''t - \beta)$$

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2}$$

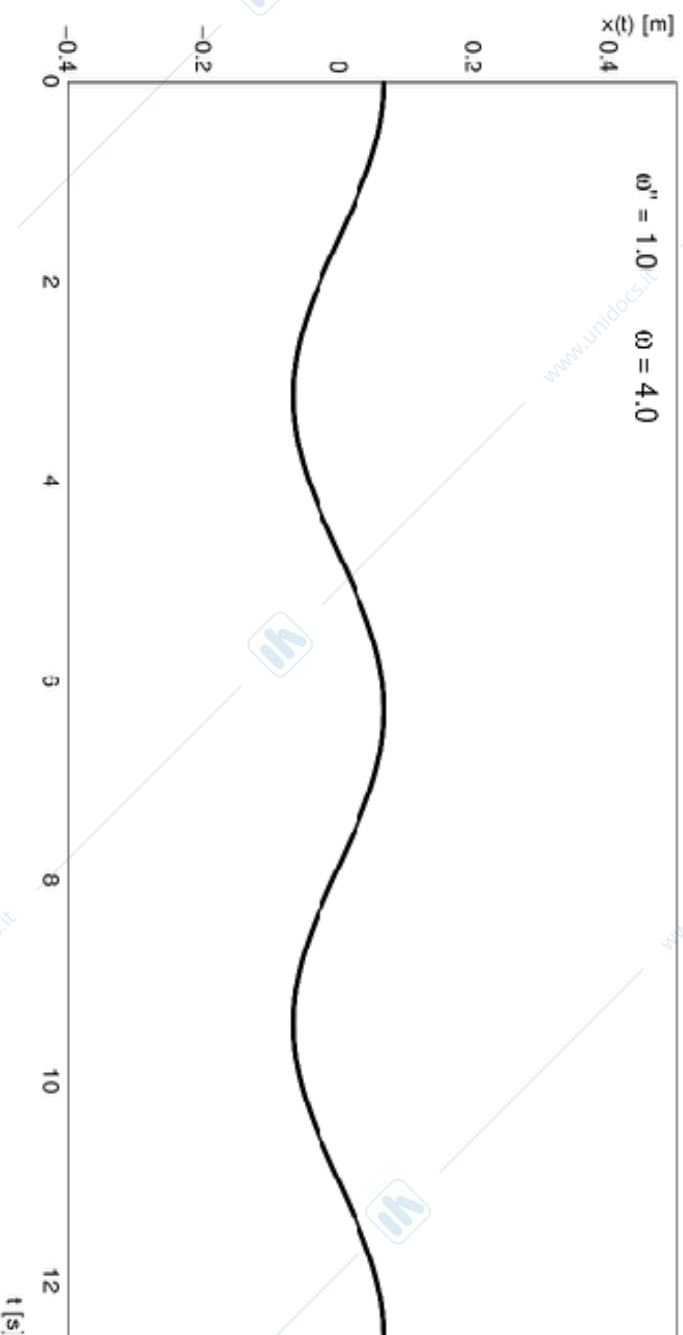
$$\beta = \arccos\left(\frac{b\omega''}{G}\right)$$

conf: tempo piccolo

- ▶ È essenzialmente un moto sinusoidale con pulsazione pari a quella della forze eccitatrice ma con una caratteristica particolare...

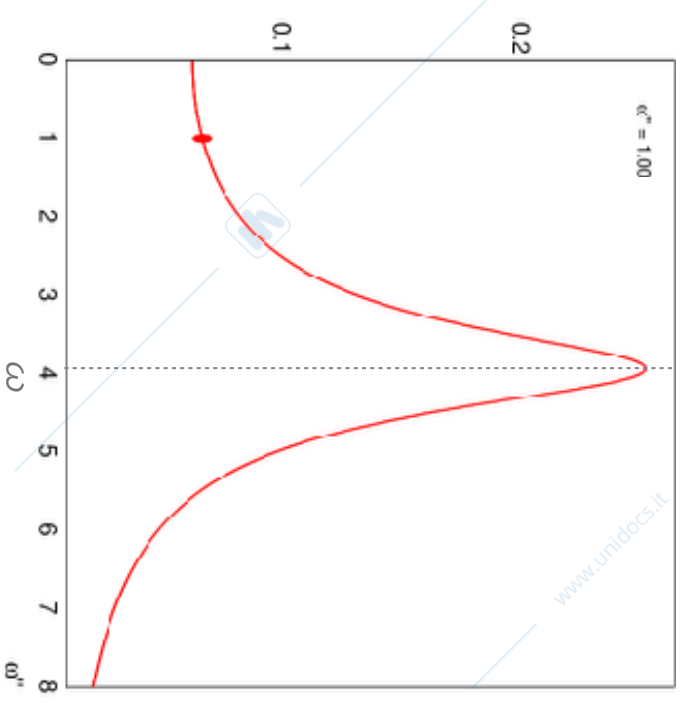
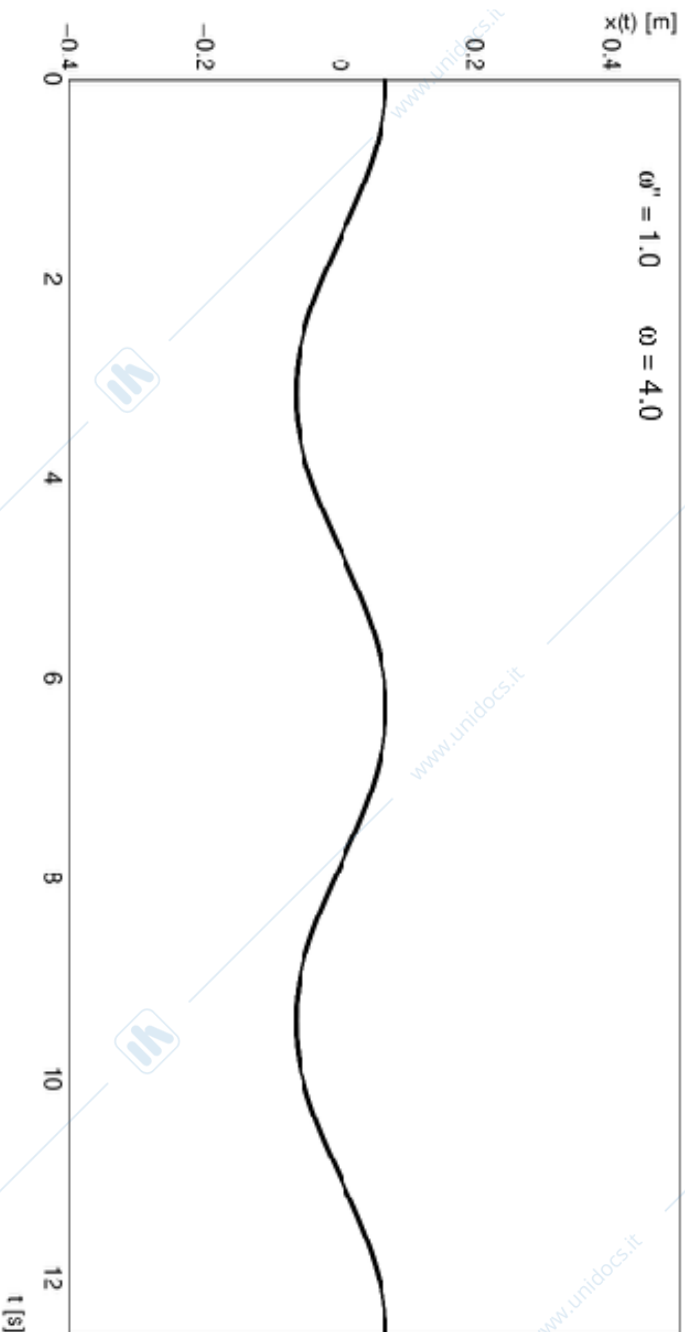
OSCILLAZIONI FORZATE

- ▶ L'ampiezza dell'oscillazione dipende da ω'' e ω



- ▶ Il valore massimo dell'ampiezza di ottiene quando la pulsazione della forza eccitatrice è uguale a quella naturale del sistema ω

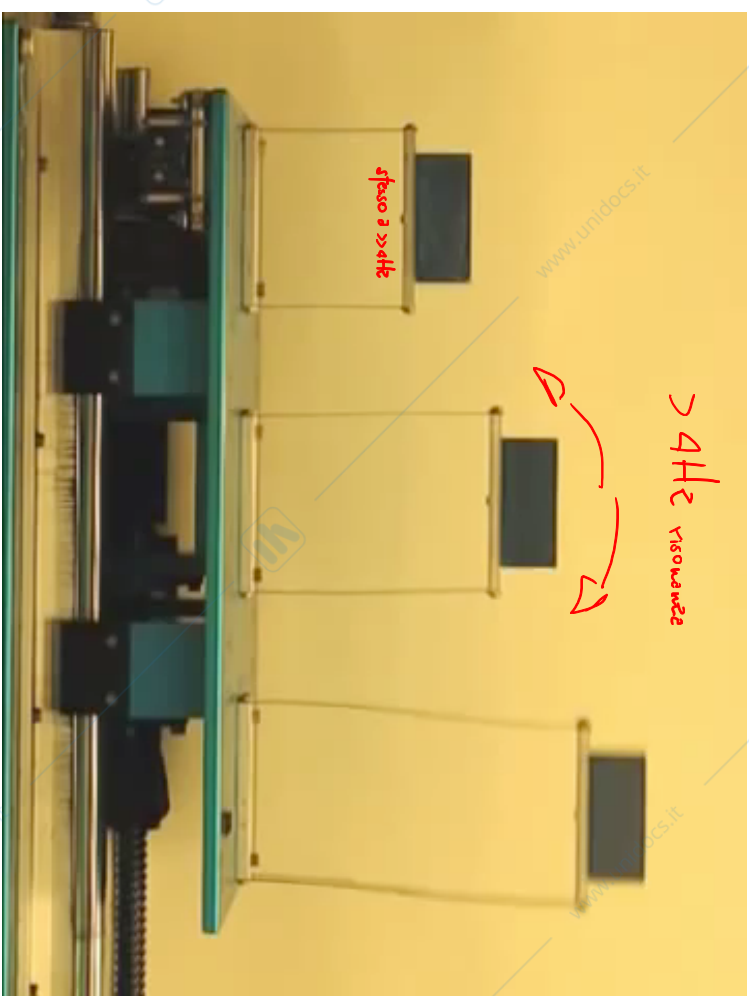
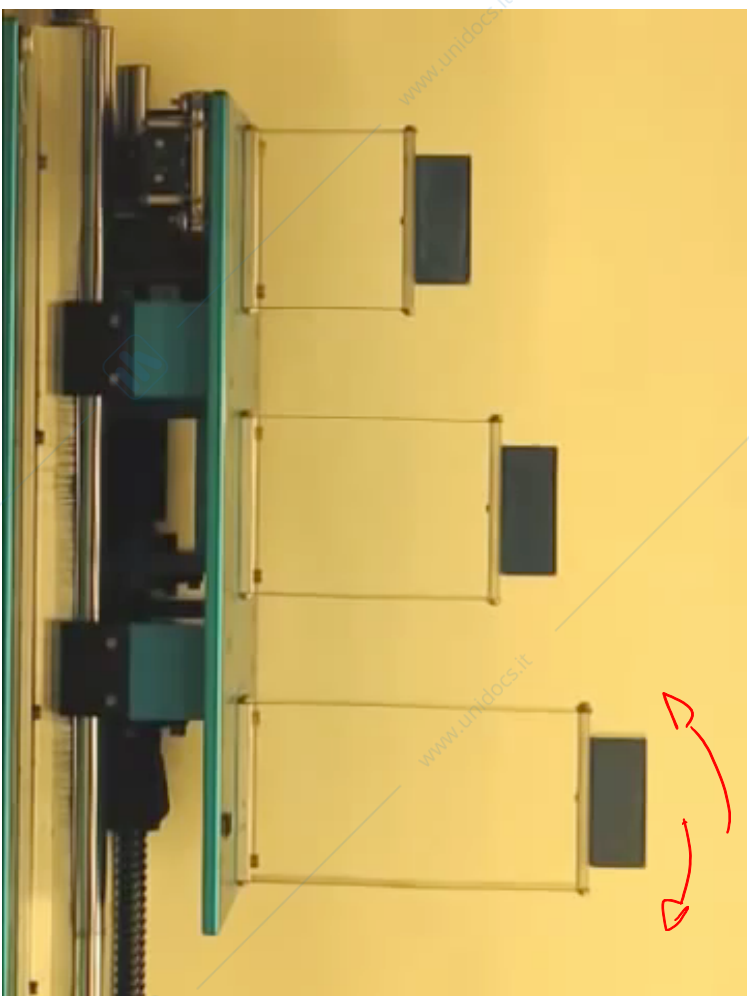
OSCILLAZIONI FORZATE



- ▶ La condizione $\omega'' = \omega$ è detta **condizione di risonanza**
- ▶ La **risonanza** è di straordinaria importanza in fisica: moltissimi fenomeni in natura esibiscono un comportamento risonante



RISONANZA



<https://www.youtube.com/watch?v=iyw4AcZuj5k>



RISONANZA



<https://www.youtube.com/watch?v=iyw4AcZuj5k>



RISONANZA



<https://www.youtube.com/watch?v=nkX18JJBHZE>

Tacoma Narrows

RIASSUNTO DELLA SCORSA LEZIONE

$$\blacktriangleright F_x(x) = -kx \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \longrightarrow x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\blacktriangleright E = U + K = \frac{1}{2}kx_m^2$$

$$\blacktriangleright T_z = -k\theta \longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0 \longrightarrow \theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\blacktriangleright \sum F_x = -kx - b v_x = m a_x \longrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\blacktriangleright x(t) = x_m e^{-bt/(2m)} \cos(\omega' t + \varphi) \quad \text{con} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

RIASSUNTO DELLA SCORSA LEZIONE

$$\sum F_x = -kx - bv_x + F_m \cos(\omega''t) = m a_x \longrightarrow$$

$$\longrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos(\omega''t)$$

1 soluzione transitoria

$$\blacktriangleright x(t) = \frac{F_m}{G} \cos(\omega''t - \beta) \text{ essendo } G = G(\omega'', \omega)$$

$$\blacktriangleright \text{risonanza per } \omega'' = \omega$$

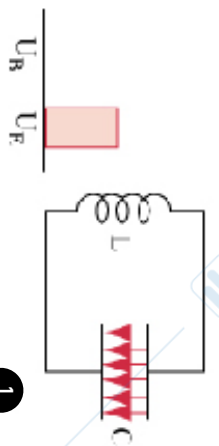
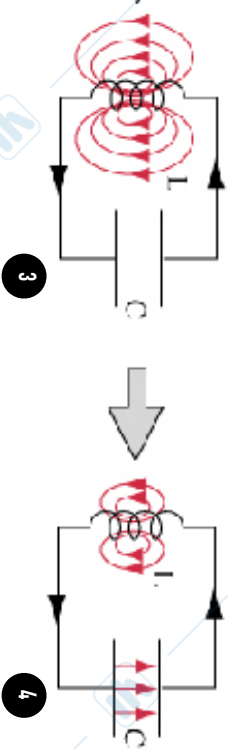
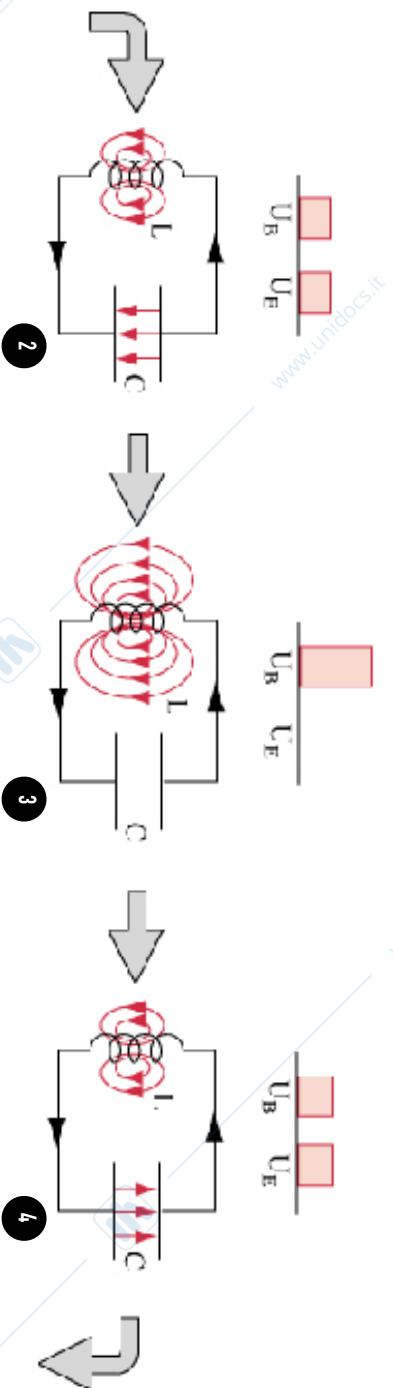
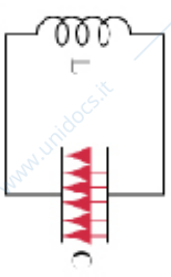
2 soluzione stazionaria

OSCILLAZIONI ELETTROMAGNETICHE

LEZIONE 1: OSCILLAZIONI

CIRCUITO LC

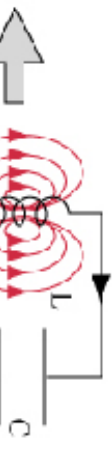
- Consideriamo un circuito a resistenza nulla costituito da un condensatore carico ed un induttore



1



8



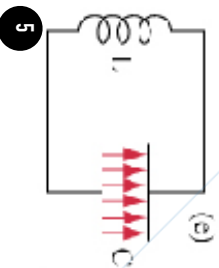
7



6



5



(a)

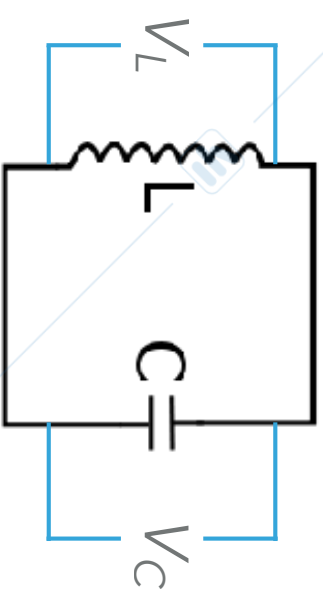


CIRCUITO LC

- ▶ In assenza di resistenza non c'è dissipazione di energia ed il ciclo di carica e scarica di L e C si ripete all'infinito
- ▶ Rimettiamoci nel caso iniziale del condensatore in scarica

- ▶ Per la legge di Kirchoff delle tensioni la somma algebrica delle tensioni = 0

$$V_L + V_C = 0 \longrightarrow -L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$



$$\text{▶ C in scarica} \longrightarrow i = -\frac{dq}{dt}$$



$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

CIRCUITO LC

- ▶ $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$ è analoga a $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$
- ▶ $q = q_m \cos(\omega t + \varphi)$ dove q_m e φ dipendono dalle condizioni iniziali
- ▶ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ detta pulsazione naturale

- ▶ Verificate che affinché $q = q_m \cos(\omega t + \varphi)$ sia soluzione di

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \text{ deve essere } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

CIRCUITO LC

- ▶ L'energia elettrica immagazzinata nel circuito LC è

$$U_E = \frac{1}{2} CV^2 \longrightarrow U_E = \frac{1}{2C} q_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

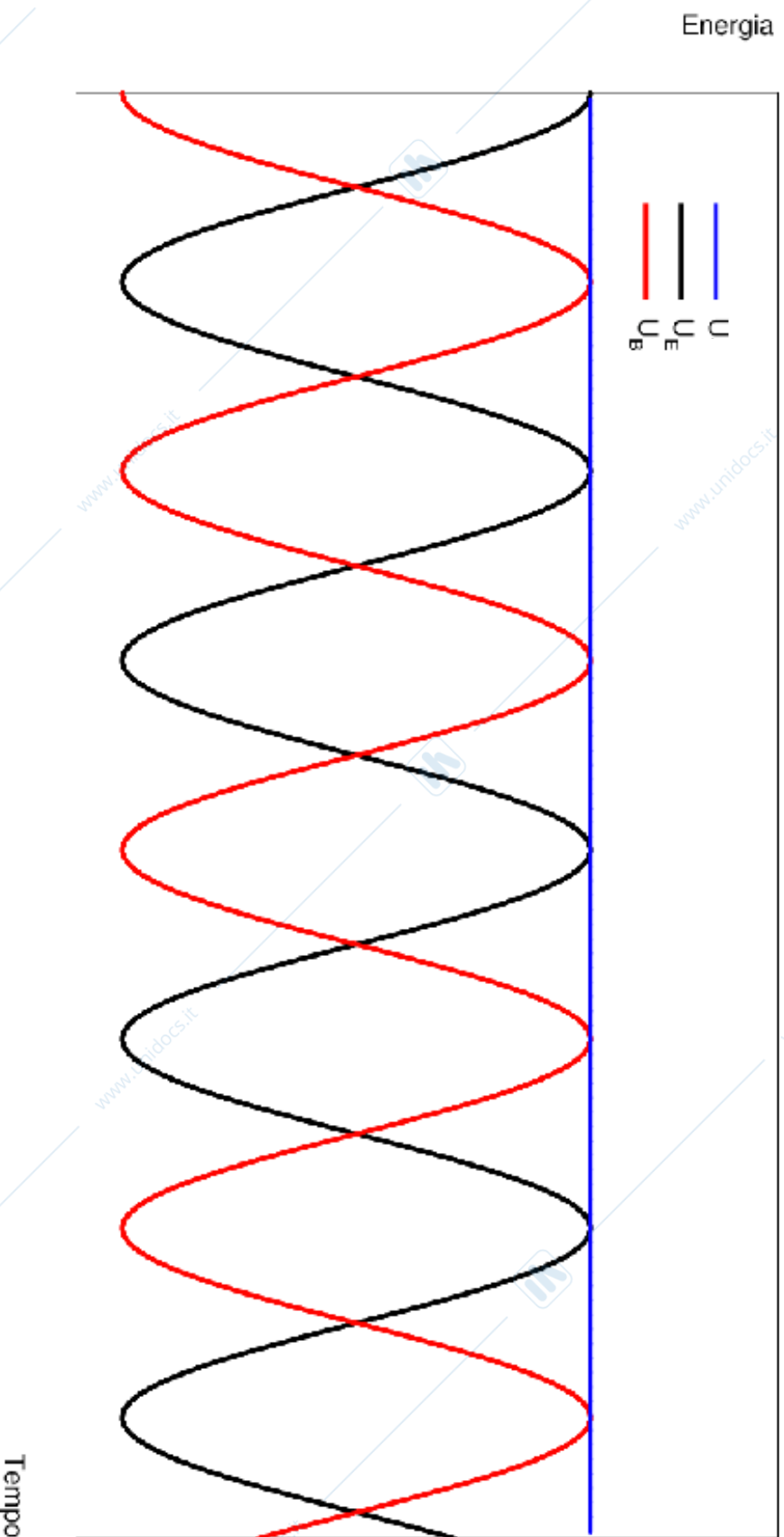
- ▶ L'energia magnetica immagazzinata nel circuito LC è

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \longrightarrow U_B = \frac{1}{2} L \omega^2 q_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\longrightarrow U_B = \frac{q_m^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi)$$

CIRCUITO LC

- ▶ Come previsto inoltre $U = U_E + U_B = \frac{q_m^2}{2C} = \text{costante}$



CIRCUITO RLC

- ▶ Per i circuiti LC abbiamo fatto l'assunzione di resistenza nulla
- ▶ Tuttavia in ogni circuito è sempre presente una resistenza $R \neq 0$
- ▶ In presenza di una resistenza c'è però dissipazione (effetto Joule)

$$\frac{dU}{dt} = -i^2 R$$

- ▶ Sappiamo che $U = U_E + U_B = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{q^2}{2C} \longrightarrow \frac{dU}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$

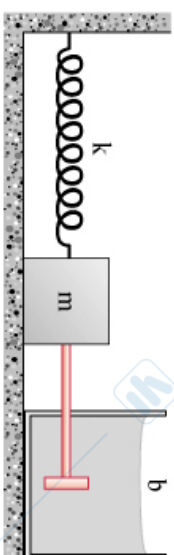
$$-i^2 R = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} \longrightarrow$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

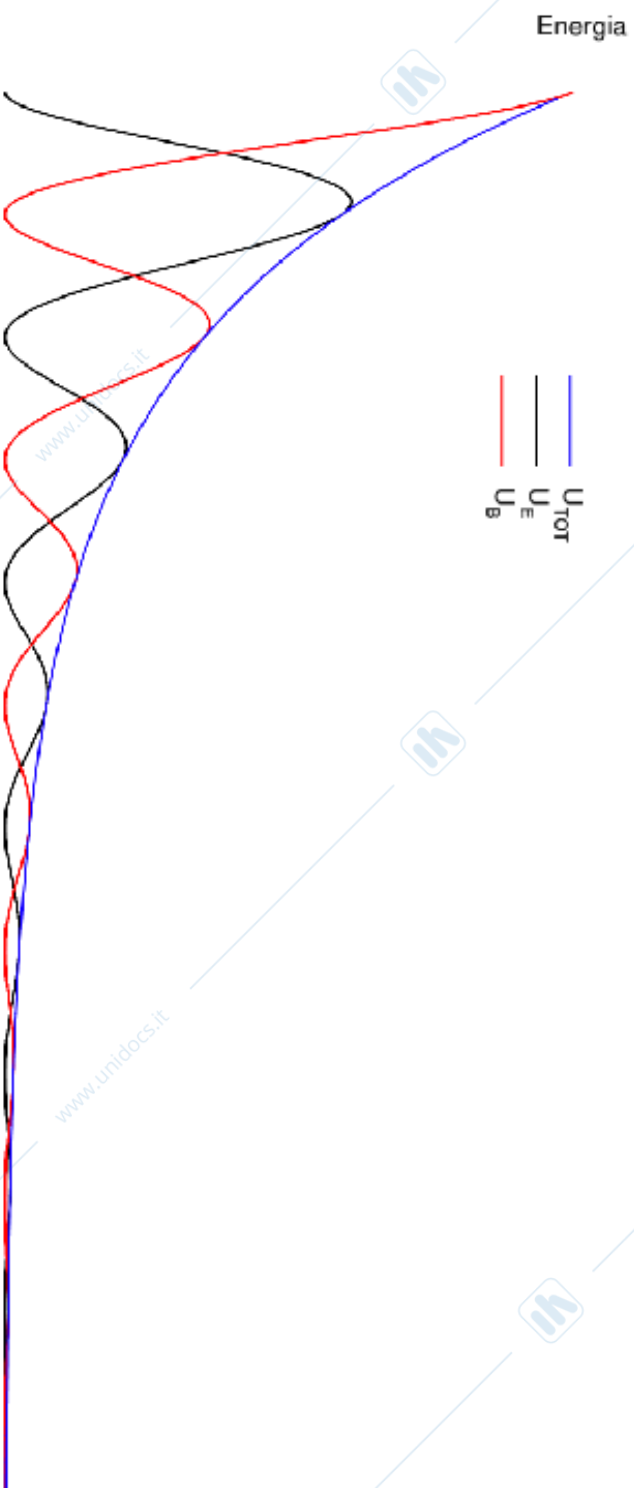
CIRCUITO RLC

▶ $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$ è analoga a

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$



▶ Se $R^2 < \frac{4L}{C}$ allora $q = q_m e^{-Rt/(2L)} \cos(\omega't + \varphi)$ con $\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

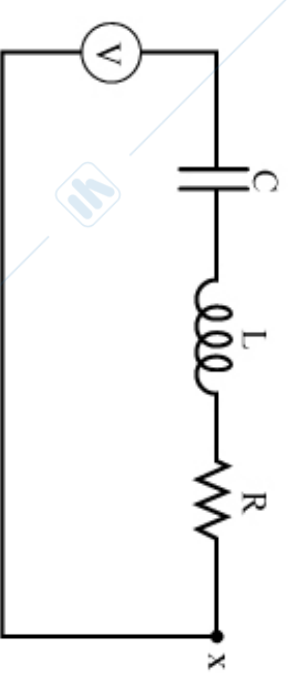


CIRCUITO RLC RISONANTE

- ▶ In un circuito RLC dopo un tempo t tutta l'energia è stata dissipata

- ▶ A meno che continuiamo a fornire energia al circuito mediante per esempio un generatore di tensione alternata

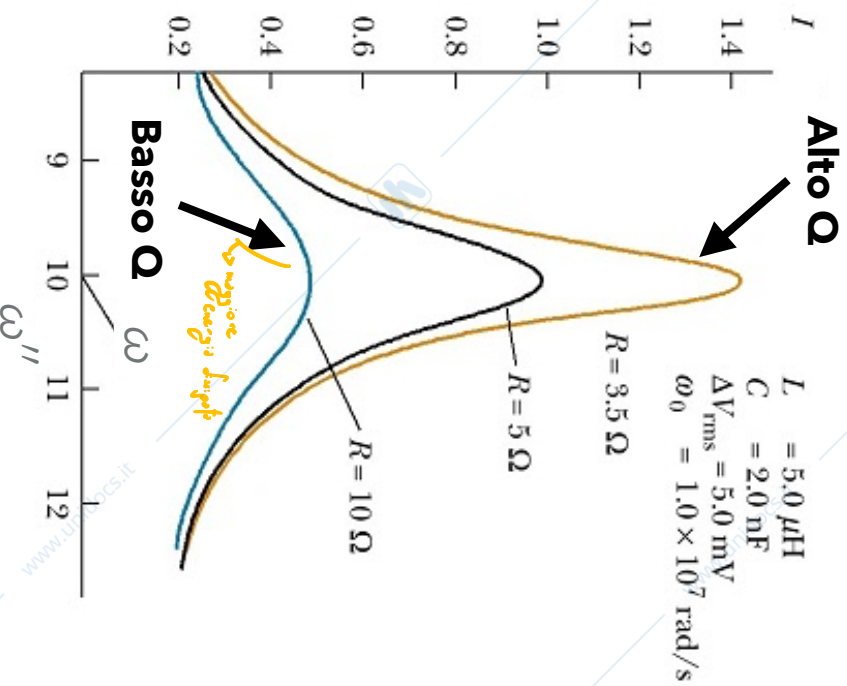
$$V(t) = V_m \cos(\omega'' t)$$



- ▶ Dopo un certo tempo nel circuito si instaura un'oscillazione della carica (e della corrente) con pulsazione ω'' a prescindere da ω
- ▶ Come nel caso meccanico visto in precedenza l'ampiezza della oscillazione dipende da ω''

CIRCUITO RLC RISONANTE

- Il valore massimo si ottiene quando $\omega'' = \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$



- Le 3 curve in figura hanno altezze e larghezze diverse, ovvero hanno un diverso fattore di merito o Q
- Q è definito come il rapporto tra l'energia immagazzinata e quella dissipata per ciclo
- Per un RLC abbiamo $Q = \frac{\omega L}{R}$



CASSE AUDIO A 2 VIE

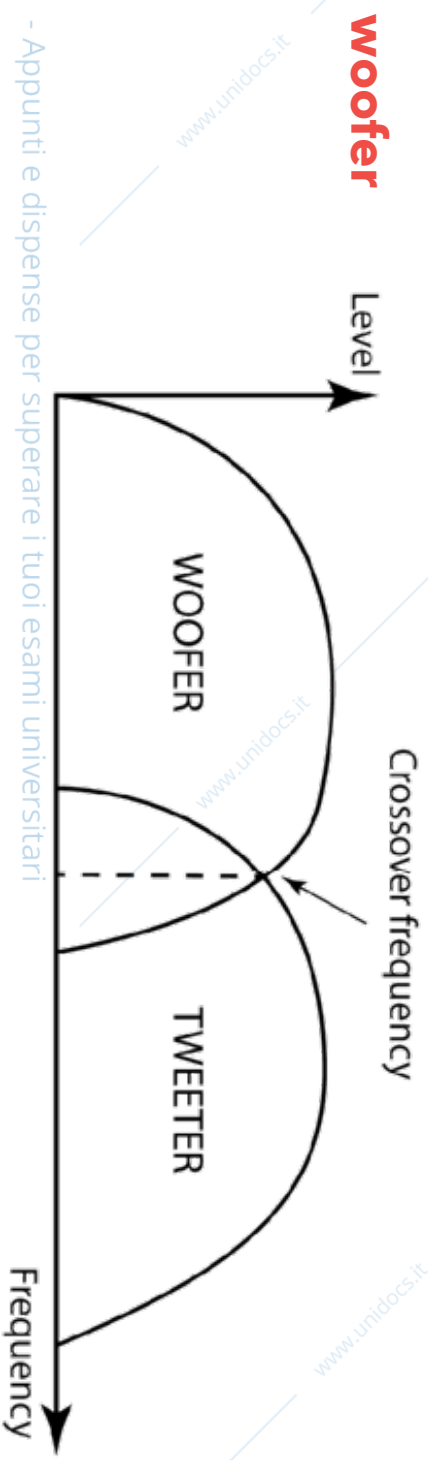
- ▶ Molte casse audio hanno 2 (o addirittura 3) altoparlanti dedicati ai bassi e agli alti (e ai medi in caso di casse a 3 vie)
- ▶ Come si fa a far riprodurre solo gli alti al tweeter e i bassi al woofer?

- ▶ Con due circuiti RLC risonanti con diverse frequenze naturali (bassa per il woofer e alta per il tweeter)



tweeter

woofer



ESERCIZI

LEZIONE 1: OSCILLAZIONI

LEZIONE 1: OSCILLAZIONI

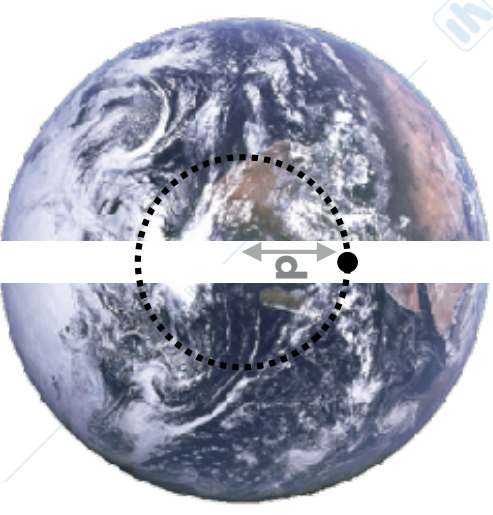
64

ESERCIZIO 1

► Dimostrare che se si potesse praticare un foro sulla Terra che vada dal polo nord al polo sud, una massa lasciata libera di cadere si muoverebbe di moto armonico passando dal centro della terra. Calcolare il tempo impiegato ad attraversare l'intero pianeta e la velocità con la quale la massa passerebbe per il centro della Terra

► Assumiamo di trascurare qualsiasi attrito

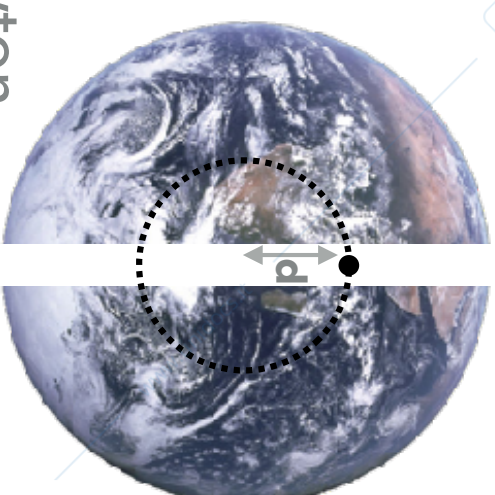
► Consideriamo un generico punto della traiettoria distante d dal centro della Terra



► $F = G \frac{m \cdot M}{d^2}$ ma **M non è tutta la massa della Terra** $M = \rho V = \frac{4}{3} \pi d^3 \rho$

ESERCIZIO 1

$$\blacktriangleright F = G \frac{m \cdot M}{d^2} = G \frac{m \ 4\pi \ d^3 \rho}{3d^2} = G \frac{4m\pi \ d\rho}{3}$$



$$\blacktriangleright -G \frac{4m\pi \ d\rho}{3} = ma \quad \text{per la seconda equazione di Newton}$$

forza di richiamo

$$\longrightarrow a(d) = -\frac{4}{3} G\pi\rho d$$

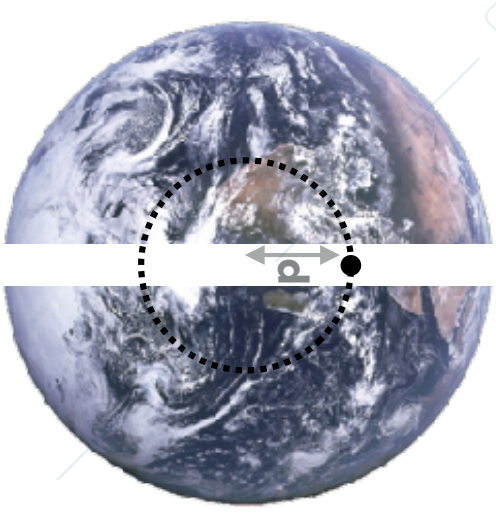
$$\blacktriangleright \text{In un moto armonico } a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

- ▶ L'accelerazione in un moto armonico è proporzionale all'opposto dello spostamento come l'accelerazione nel caso in esame

ESERCIZIO 1

$$a(d) = -\frac{4}{3}G\pi\rho d = -\omega^2 d$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

- ▶ La velocità nel centro della Terra è la velocità massima

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow v(t) = A\omega\sin(\omega t + \varphi) \longrightarrow v_{\max} = A\omega$$

ESERCIZIO 1

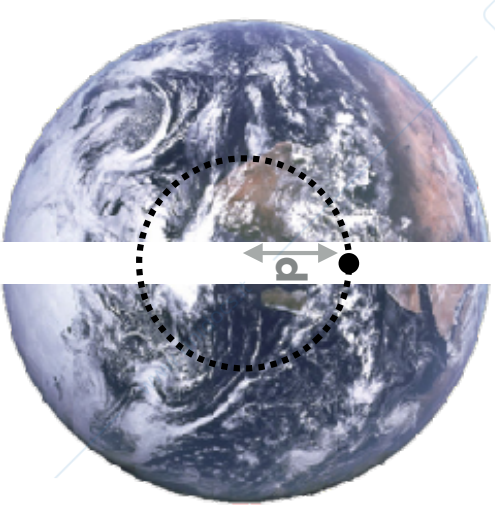
- ▶ Un po' di numeri

$$\rho = 5,51 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

$$T = 5,06 \cdot 10^3 \text{ s}$$

$$V_{\max} = 7900 \text{ m/s}$$

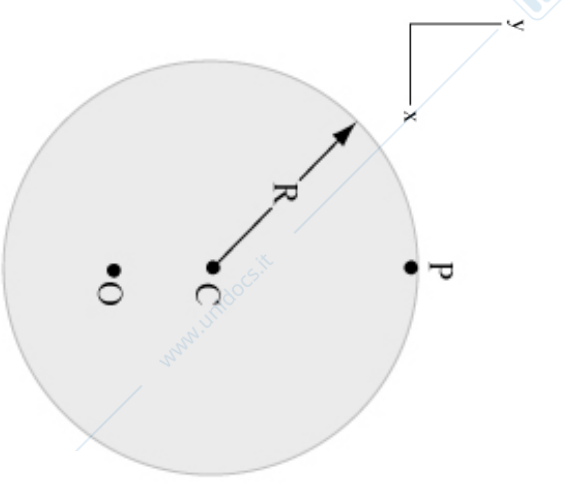


- ▶ Tempo per andare dal polo nord a quello sud: $t = \frac{T}{2} = 2,53 \cdot 10^3 \text{ s}$

~42 min

PROBLEMA SVOLTO 17.5 E PROBLEMA 17.24

- ▶ Un disco uniforme ruota attorno ad punto P del suo bordo. a) Trovare il periodo per piccole oscillazioni e la lunghezza del pendolo semplice equivalente



$$I_C = \frac{1}{2}MR^2 \quad \rightarrow \quad I_P = I_C + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

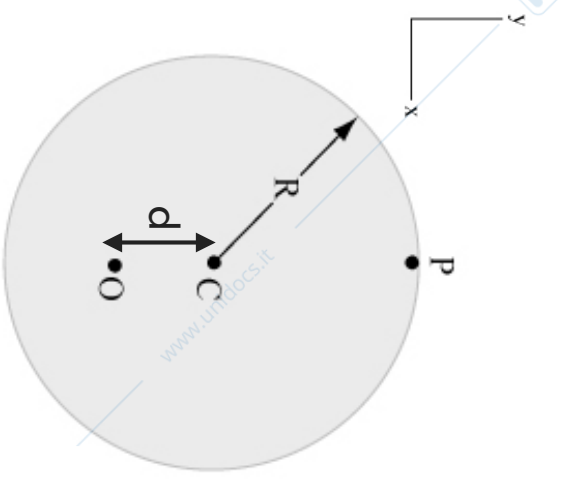
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_P}{MgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}MR^2}{2MgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}R}{2g}}$$

$$L = \frac{I_P}{MR} = \frac{3}{2}R$$

- ▶ b) Trovare il centro di oscillazione O e mostrare che se il disco viene posto in oscillazione attorno a O il periodo non cambia

PROBLEMA SVOLTO 17.5 E PROBLEMA 17.24

- Il centro di oscillazione sarà localizzato lungo la retta passante per P e C a distanza L da P



$$I_O = I_C + Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{3}{4}MR^2$$

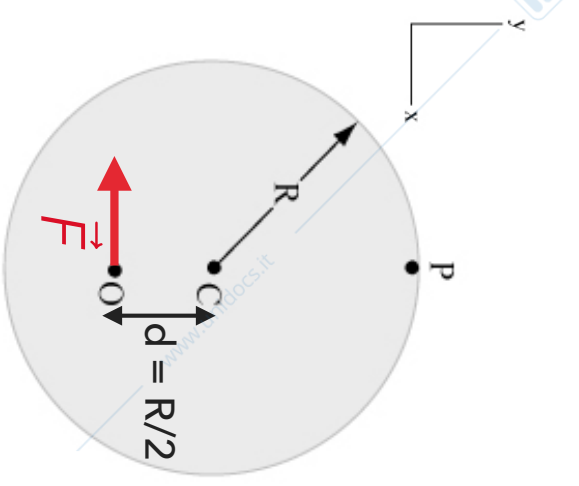
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{3MR^2/4}{MgR/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}}$$

- Che è uguale a quello ottenuto per rotazioni attorno a P

- c) E se scegliessimo un asse orizzontale passante per C? (risolvetelo a casa)**

PROBLEMA SVOLTO 17.5 E PROBLEMA 17.24

- Supponendo di applicare una forza impulsiva in O (anche noto come centro di percussione), **d**) **dimostrare che l'accelerazione in P è nulla**



- Trattiamo questo caso come una combinazione di un moto traslatorio ed uno rotatorio attorno al centro di massa C

$$\text{Traslazione: } a_s = \frac{F}{M}$$

$$\text{Rotazione: } \alpha = \frac{T}{I} = \frac{FR \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{F}{MR}$$

- A causa di α P dovrebbe muoversi verso destra con $a_d = \alpha R = \frac{F}{M}$

- Ma a causa di a_s P dovrebbe muoversi verso sinistra con una accelerazione pari a $\frac{F}{M} \longrightarrow$ **non si muove**