Analisi 2

Funzioni da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$: Dominio - Curve di livello

20 Settembre 2018

1. Stabilisci se ciascuno dei seguenti insiemi è aperto, chiuso, limitato, connesso:
   - $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x + y \leq 1\}$
     [D è limitato, connesso, nè aperto nè chiuso.]
   - $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$
     [D è illimitato, connesso, chiuso.]
   - $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \neq 0\}$
     [D è limitato, non connesso, nè aperto nè chiuso.]

2. Determina e disegna nel piano cartesiano il dominio delle seguenti funzioni e stabilisci se è limitato, aperto o chiuso, connesso:
   - $f(x, y) = \sqrt{3x - x^2}\dfrac{\sqrt{(x^2 - y^2)}}{\sqrt{x + y}}$
   - $f(x, y) = \log(x + |x| + y + |y|)$
   - $f(x, y) = \arcsin(xy - y - 2x)$

3. Rappresenta le curve di livello delle seguenti funzioni:
   - $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   - $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$
   - $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$
   - $f(x, y) = y - |x|$
   - $f(x, y) = 4x^2 + y^2$
   - $f(x, y) = xy$

Extra

4. Determina e disegna nel piano cartesiano il dominio delle seguenti funzioni e stabilisci se è limitato, aperto o chiuso, connesso:
   - $f(x, y) = \dfrac{\log x}{\sqrt[4]{-\log(2y^2 + x)}}$
   - $f(x, y) = f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{2x - y + 2}$
   - $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

- $f(x,y) = \sqrt{y - x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2 - y}$

5. Stabilisci se l'insieme di definizione della funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ è chiuso, aperto, nè chiuso nè aperto.

6. Stabilisci se il dominio della funzione $f(x,y) = \log(3 - xy)$ è chiuso, aperto, nè chiuso nè aperto, limitato o non limitato.

7. Stabilisci se l'insieme $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \dfrac{1}{y^2} < 0\right\}$ è chiuso, aperto, limitato, connesso.

8. Determina e rappresenta sul piano cartesiano il campo di esistenza D delle seguenti funzioni in due variabili:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{1 - \dfrac{\ln y}{x}}$
   [$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y > 0,\ y \leq e^x$ per $x > 0$ oppure $y \geq e^x$ per $x < 0\}$; D è illimitato, non connesso, nè aperto nè chiuso.]

   (b) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x\sqrt{y - x})}{xy - 1}$
   [$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x,\ x > 0,\ y \neq \dfrac{1}{x}\right\}$; D è illimitato, non connesso, aperto.]

   (c) $f(x,y) = \sqrt{|y-1|\,(x + x^2)} + \ln\left(1 - \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{4y}}\right)$
   [$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \leq -1 \vee x \geq 0) \vee y = 1,\ y > 0,\ x^2 + y^2 - 4y < 0\}$; D è limitato, connesso, nè aperto nè chiuso.]

   (d) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2 + y - 1}{x^2 - 1}}$
   [$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y > 0,\ y \leq e^x$ per $x > 0$ oppure $y \geq e^x$ per $x < 0\}$; D è illimitato, non connesso, nè aperto nè chiuso.]

   (e) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{(x^2 - 2x - y)(x^2 - 2x + y)}}{(2x-3)^2 + (2y-1)^2} + \ln\dfrac{x+1}{2-x}$
   [$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 2,\ (x,y) \neq \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right),\ -|x^2 - 2x| < y < |x^2 - 2x|\right\}$; D è limitato, connesso, nè aperto nè chiuso.]

   (f) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{\ln(x^2 - y)}}{\arcsin y}$
   [$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 - 1,\ y \neq 0,\ -1 < y < 1\}$; D è illimitato, non connesso, nè aperto nè chiuso.]

   (g) $f(x,y) = \sqrt{-xy} + \arcsin(x^2 + y^2)$
   [$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0$ per $y \leq 0$ oppure $x \leq 0$ per $y \geq 0\}$; D è limitato, connesso, chiuso.]

9. Determina il dominio della funzione $f_\alpha(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - \alpha + 1}} + (\alpha - 1)\log(\alpha - x^2 - y^2)$al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$.

10. Rappresenta sul piano cartesiano le curve di livello delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$
$\left[x^2 + y^2 = 1 - c,\ c \leq 1 : \text{circonferenze di centro } C = (0,0) \text{ e raggio } r = \sqrt{1-c}\right]$

(b) $f(x,y) = y - x^2$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$
$\left[y = -x + \dfrac{1}{c},\ c \neq 0 : \text{rette parallele alla bisettrice } y = -x \text{ esclusa la bisettrice}\right]$

(d) $f(x,y) = \dfrac{1+xy}{x^2}$
$\left[\begin{array}{l} y = cx - \dfrac{1}{x} : \text{funzioni dispari con dominio } x \neq 0 \text{ e asintoto verticale l'asse } y, \\ \text{se } c > 0 \text{ sempre crescenti, se } c = 0 \text{ iperbole equilatera } y = -\dfrac{1}{x}, \\ \text{se } c < 0\ x = \sqrt{-\dfrac{1}{c}} \text{ è punto di massimo, } x = -\sqrt{-\dfrac{1}{c}} \text{ è punto di minimo.} \end{array}\right]$

(e) $f(x,y) = x\,(y - \ln x)$
$\left[\begin{array}{l} y = \ln x + \dfrac{c}{x} : \text{funzioni con dominio } x > 0 \text{ e asintoto verticale l'asse } y, \\ \text{se } c < 0 \text{ sempre crescenti, se } c = 0\ y = \ln x,\ \text{se } c > 0\ x = c \text{ è punto di minimo.} \end{array}\right]$

(f) $f(x,y) = \dfrac{ye^x}{x}$
$\left[\begin{array}{l} y = cxe^{-x} : \text{funzioni con dominio } x \neq 0, \text{ l'asse } x \text{ è asintoto orizzontale a } +\infty, \\ \text{se } c = 0\ y = 0, \text{se } c < 0\ x = 1 \text{ è punto di minimo, se } c > 0\ x = 1 \text{ è punto di massimo.} \end{array}\right]$

11. Disegna la curva di livello 1 della funzione $f(x,y) = e^{x^2+y}$.

12. Disegna la curva di livello 3 della funzione $f(x,y) = e^{x^2 y}$.

13. Sia $f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}$; disegna il dominio D di definizione di f; stabilisci se D è aperto, chiuso, limitato, connesso (per archi); disegna la curva di livello 0 di f.

$\left[\begin{array}{l} D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ 2x^2 + y^2 \geq 1\right\}; \\ D \text{ è l'insieme dei punti del semipiano } x \geq 0 \text{ interni al cerchio centrato nell'origine} \\ \text{di raggio 1 e esterni all'ellisse centrata nell'origine di semiassi } \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ e 1, frontiera inclusa.} \\ D \text{ è chiuso, limitato e connesso. La linea di livello } f = 0 \text{ è la parte di frontiera di } D \\ \text{costituita dall'ellisse.} \end{array}\right]$

14. Sia $f(x,y) = e^{\sqrt{x \sin y}}$; determina il dominio D di f, disegnalo sul piano e stabilisci se D è aperto, chiuso, limitato, connesso; scrivi le equazioni degli insiemi (curve) di livello c di f,specificando per quali valori di c tali insiemi non sono vuoti.

$\left[\begin{array}{l} D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0,\ 2k\pi \leq y \leq \pi + 2k\pi) \vee (x \leq 0,\ \pi + 2k\pi \leq y \leq 2\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\right\}; \\ D \text{ è chiuso, illimitato e connesso. La linea di livello } c \text{ di } f \text{ è l'insieme dei punti del piano tali} \\ \text{che } f(x,y) = e^{\sqrt{x \sin y}} = c. \text{ Se } c > 0 \text{ allora } \sqrt{x \sin y} = \ln c;\ \text{se } c \geq 1, \text{ si ha che } x \sin y = \ln^2 c. \end{array}\right]$