Analisi Matematica 2
VIII esercitazione

1. Integrali di linea

1. PROBLEMA Sia $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}$ e sia $F : D \to \mathbb{R}^2$ il campo definito ponendo

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Verificare che il campo è conservativo e calcolare un potenziale.

2. PROBLEMA È dato il campo di forze nello spazio

$$F(x,y,z) = (x, y, xz - y).$$

Calcolare il lavoro da esso compiuto su una particella che percorra il segmento che unisce l'origine a $(1,2,4)$.

3. PROBLEMA

(1) Calcolare la circuitazione del campo $F(x,y) = (2x+y, -x+y)$ sul bordo del quadrato di vertici $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ percorso in senso antiorario.

(2) Calcolare la circuitazione del campo $F(x,y) = (2x+y, -x+y)$ sul bordo del quadrato di vertici $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ percorso in senso orario.

(3) Calcolare la circuitazione del campo $F(x,y) = (2x+y, x+y)$ sul bordo del quadrato di vertici $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ percorso in senso antiorario.

4. PROBLEMA È dato il campo di forze $F(x,y) = (cxy, x^6y^2)$ con $c > 0$. Esso agisce su una particella che deve percorrere un arco di curva di equazione $y = ax^b$, con $a > 0$, $b > 0$ dall'origine fino all'intersezione della curva con la retta $x = 1$. Determinare in funzione di c il valore di a che rende indipendente da b il lavoro compiuto dal campo.

5. PROBLEMA È dato il campo scalare

$$U(x,y,z) = e^x \sin y + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}z^2 + z.$$

Siano inoltre F e G i campi di forze

$$F = \nabla U, \quad G = \nabla \times F.$$

(1) Calcolare il lavoro di F lungo la curva $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(2) Calcolare il lavoro di G lungo la curva r.

6. PROBLEMA Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ il campo definito ponendo

$$F(x,y) = (\frac{-y + x^2 + y^2 - yx^2 - y^3}{x^2 + y^2}, \frac{x + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2}).$$

(1) Calcolare l'integrale di linea del campo sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine percorsa in senso antiorario.
(2) Verificare se il campo è conservativo e in tal caso calcolarne un potenziale.

2. Integrazione iterata

7. PROBLEMA Sia $D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ e sia $F : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $F(x,y) = 2 - x + y$.

Calcolare

$$\iint_D F(x,y)dxdy.$$

8. PROBLEMA Sia $D = \{(x,y) \mid 2 \geq x \geq 1,\ y \geq 1,\ y \leq x\}$ e sia $F : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $F(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}$.

Calcolare

$$\iint_D F(x,y)dxdy.$$

9. PROBLEMA Sia $D = \{(x,y) \mid 2 \geq x \geq 1,\ 1 - x \geq y \geq -1\}$ e sia $F : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $F(x,y) = \sin(y^2)$.

Calcolare

$$\iint_D F(x,y)dxdy.$$

10. PROBLEMA Calcolare i seguenti integrali doppi:

(1) $\iint_D (\sqrt{x} + xy^2)dxdy$ dove D è il triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (1,1)$. [Risposta: $\frac{7}{15}$]
(2) $\iint_D \frac{\sin y}{y} dxdy$ dove $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq \pi\}$. [Risposta: 2]

11. PROBLEMA Calcolare
$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy.$$

12. PROBLEMA Calcolare i seguenti integrali doppi.

(1) $\iint_D (x+y)dxdy$ dove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \tfrac{\sqrt{2}}{2},\ y \le x \le \sqrt{1-y^2}\}.$$
[Risposta: $\frac{1}{3}$]

(2) $\iint_D \cos(\pi y)dxdy$ dove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-2| \le y \le 1\}.$$
[Risposta: $-\frac{4}{\pi^2}$]

(3) $\iint_D xydxdy$ dove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2x - x^2\}.$$
[Risposta: $\frac{8}{15}$]

(4) $\iint_D (x+y+1)dxdy$ dove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y^2+1,\ -1 \le y \le 1\}.$$
[Risposta: $\frac{68}{15}$]

(5) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$ dove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le y \le 1\}.$$
[Risposta: $\frac{1}{3}(1-\ln 2)$]

(6) $\iint_D dxdy$ dove D è il parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(3,0)$, $(4,1)$, $(1,1)$. [Risposta: 3]