No. ANALISI 2

Date 17 · 09 · 19

Presentazione corso

- Materiale: su Beep
- Calendario: su Beep

INIZIO LEZIONI

CURVE

Una curva è una funzione $f: I \to \mathbb{R}^m$

dove $I \subset \mathbb{R}$

in generale è un intervallo aperto, chiuso, semi-chiuso, infinito

↳ se $m=2$ → CURVA PIANA

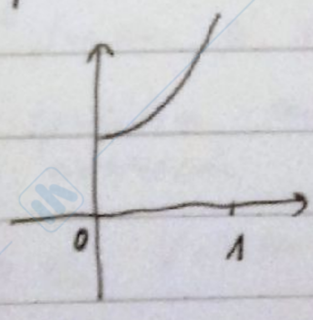
↳ se $m=3$ → CURVA NELLO SPAZIO

es

$f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = (t, t^2)$

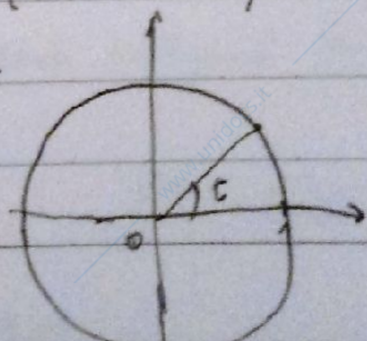
tratto di parabola



es

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad f(t) = (\cos t, \sin t)$

circonferenza



In generale una curva piana sarà definita da:

$$f : I \to \mathbb{R}^2 \qquad f(t) = (x(t), y(t))$$

$$x : I \to \mathbb{R} \qquad y : I \to \mathbb{R}$$

componenti della curva

mentre per una curva nello spazio sarà

$$f : I \to \mathbb{R}^3 \qquad f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

componenti della curva

Def. Una curva si dice continua in t_0 se le curve x, y, z sono continue in t_0.

Def. Una curva si dice differenziabile in t_0 se le sue componenti sono differenziabili in t_0.

Sostegno di una curva

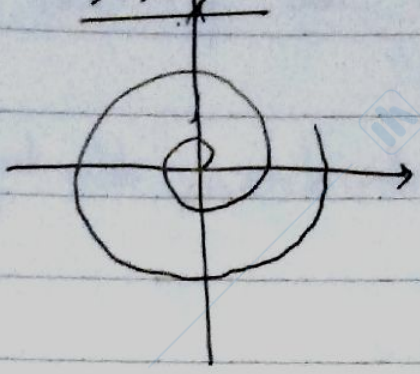
Il sostegno di una curva $f : I \to \mathbb{R}^n$ è l'immagine della curva.

es. Quindi il sostegno di $f : I \to \mathbb{R}^2$ $f(t) = (x(t), y(t))$ è $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$

→ Il sostegno è il disegno della curva

es. Spirale

Sostegno:



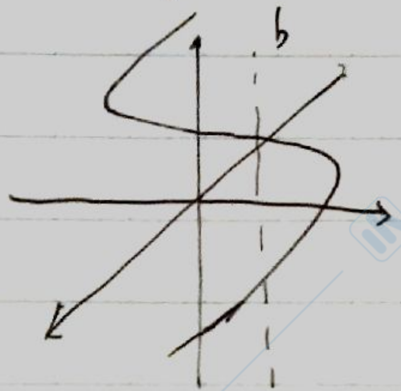
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = (e^{at} \cos(\omega t), e^{at} \sin(\omega t))$

con $a \neq 0$ e $\omega \neq 0$

es. Elica

Sostegno



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

passo

$f(t) = (a \cos(2\pi t), a \sin(2\pi t), bt)$

se $a > 0$ e $b \neq 0$

Oss. Una curva differenziabile è anche continua.

Vettore tangente

Se la curva piana

$$f: I \to \mathbb{R}^2 \qquad f(t) = (x(t), y(t))$$

è differenziabile in t_0 allora il vettore

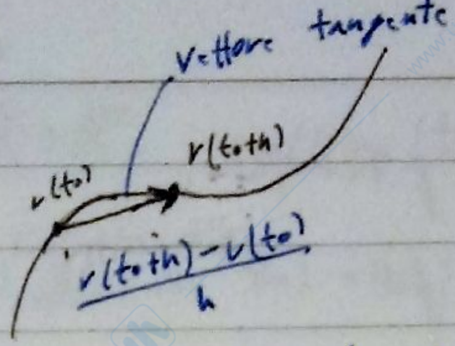
$$f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

è il vettore tangente di f in t_0.

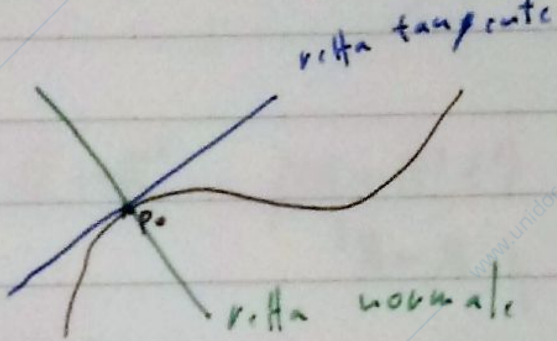
es. $f_1(t) = (t, t) \quad f_1'(t) = (1, 1)$

$f_2(t) = (t^3, t^3) \quad f_2'(t) = (3t^2, 3t^2)$

(cs)



se $h \to 0$ la secante tende alla direzione della tangente



Esercizio

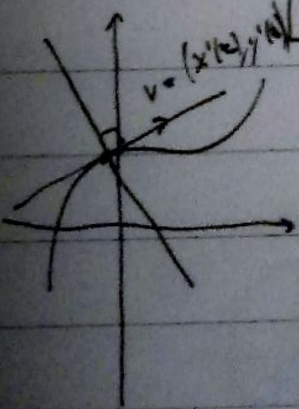
- $r: I \to \mathbb{R}^2$ con r differenziabile in t_0

$$v = r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$
$$r(t_0) = (x_0, y_0)$$

→ Scrivere eq. retta tangente e ortogonale in p_0

Retta tangente: (eq. par.) $\begin{cases} x = x_0 + s \cdot x'(t_0) \\ y = y_0 + s \cdot y'(t_0) \end{cases}$

impongo passaggio per il punto



Retta tangente (eq. cart.): $-y'(t_0)(x - x_0) + x'(t_0)(y - y_0) = 0$

dalla forma $ax + by + c = 0$
e il vettore (a, b) è quello normale alla retta

Retta normale (eq. cart.): $x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) = 0$

Esercizio

Calc. l'eq. cart. della retta tang. e orto. alla curva

$$r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definita ponendo

$$r(t) = (t e^t, 1 - \arctan(2t))$$

nel punto $(0,1)$

$$\Rightarrow r'(0) = \left(e^t + t e^t \Big|_{t=0} , -\frac{1}{1+(2t)^2} \cdot 2 \Big|_{t=0} \right)$$

$$r'(0) = (1, -2)$$

Retta tangente: $2(x-0) + (y-1) = 0$

$2x + y = 1$

Retta normale: $1 \cdot (x-0) - 2(y-1) = 0$

$x - 2y + 2 = 0$

Curve regolari

Una curva $f: I \to \mathbb{R}^n$ si dice regolare se è diff. in I e il vettore tangente è diverso da 0 in ogni punto t di I

Esercizio

Verificare che la curva $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$r(t) = \begin{cases} (e^{-1/t^2}, 0) & \text{se } t < 0 \\ (0, e^{-1/t^2}) & \text{se } t > 0 \\ (0,0) & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

è diff. ma non regolare

No. ANALISI 2

Date 17 · 01 · 19

$\Rightarrow$ $x(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{se } t<0 \\ 0 & \text{se } t\geq 0 \end{cases}$ $\quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t\leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{se } t\geq 0 \end{cases}$

• esiste $x'(0)$?

$\hookrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{x(h)-x(0)}{h}$?

$\lim_{h\to 0^-} \frac{x(h)-x(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h} = 0$ ✓

$\lim_{h\to 0^+} \frac{x(h)-x(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$ ✓

da $t = \frac{1}{h}$ $\quad h\to 0^-$, $t\to -\infty$

$\lim_{t\to -\infty} t\, e^{-t^2} = 0$

$\longrightarrow x'(0) = 0$

• esiste $y'(0)$?

. . . .

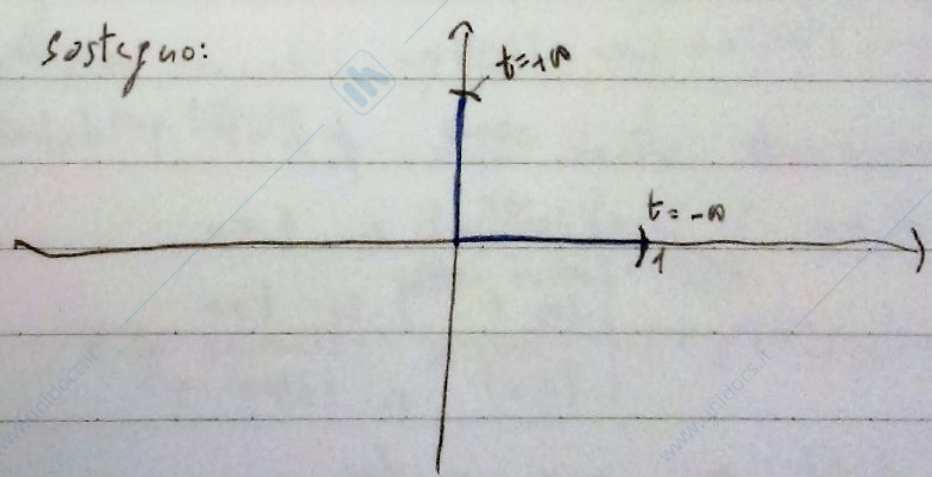
$\rightarrow y'(0) = 0$

$\hookrightarrow$ La curva è differenziabile perché il vettore tangente esiste per ogni t

Ma non è regolare perché

$v'(0) = (x'(0), y'(0)) = (0,0)$

$\rightarrow$ sostegno:

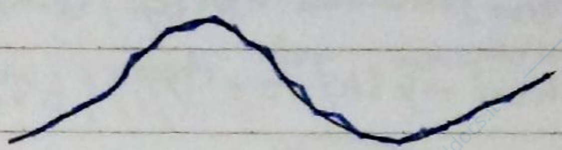


Lunghezza d'arco

Se consideriamo una curva piana regolare

$$r: [a,b] \to \mathbb{R}^2$$

Vogliamo calcolare la lunghezza del sostegno della curva

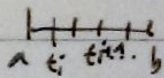


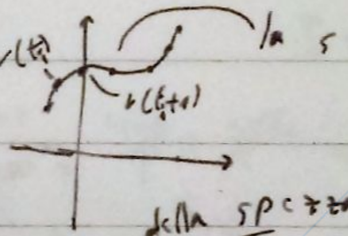
→ Approssimiamo la curva con spezzate sempre più piccole calcolando la lunghezza.

↳ sommo le spezzate.
faccio il limite mandando la lunghezza a 0

→ Formalizzando:

se la curva r sta su intervallo





la lunghezza della spezzata dunque è

$$L_n = \sum_i \| r(t_{i+1}) - r(t_i) \|$$

→ La lunghezza della CURVA è

$$L = \lim_{n \to +\infty} L_n$$

Per calcolare $\|r(t_{i+1}) - r(t_i)\|$ possiamo scriverlo esplicitamente come:

$$\sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$$

↳ per il teorema di Lagrange (della media)

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$$
$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$\Rightarrow (t_{i+1} - t_i)\sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} = \|r(t_{i+1}) - r(t_i)\|$$

$$\Rightarrow L_n = \sum_i (t_{i+1} - t_i)\sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2}$$

Dunque la lunghezza della curva è

$$L = \lim_{n \to +\infty} L_n = \lim \sum_i (t_{i+1} - t_i)\sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2}$$

dove per $n \to +\infty$ $\xi_i \simeq \eta_i$ ↘ somme di Cauchy

perciò diventa

$$\lim (t_{i+1} - t_i)\underbrace{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}_{\|r'(t)\|}$$

↙ somme di Reimann

$$\hookrightarrow \quad L(r) = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

Esercizio

Calcolare la lunghezza d'arco di questa curva

$r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad r(t) = (1 - \cos(t), t - \sin(t))$

$\rightarrow L(r) = \int_a^b \|r'(t)\| \, dt$

$r'(t) = (\operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$

$L(r) = \int_0^{2\pi} \|\operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t)\| \, dt$

$\rightarrow \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}(t)^2 + (1 - \cos(t))^2} \, dt =$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2(t) + 1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)} \, dt =$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \, dt = \sqrt{2} \int_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{1+s} \, \frac{ds}{\operatorname{sen}(t)} =$

qui è t

con $0 \le t \le \pi$ $\quad \operatorname{sen}(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)}$ $\qquad s = -\cos t \qquad \frac{ds}{dt} = \operatorname{sen}(t)$

con $\pi \le t \le 2\pi$ $\quad \operatorname{sen}(t) = -\sqrt{1 - \cos^2(t)}$ $\qquad \operatorname{sen}(t) = \sqrt{1 - s^2}$, $\; s = -\cos(t)$

$dt = \frac{ds}{\operatorname{sen}(t)}$

$= \sqrt{2} \int_{t=0}^{t=2\pi} \frac{\sqrt{1+s}}{\sqrt{1-s^2}} \, ds = \sqrt{2} \int_{t=0}^{t=2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-s}} \, ds = \sqrt{2} \int_{t=0}^{t=2\pi} (1-s)^{-\frac{1}{2}} \, ds = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} (1-s)^{1-\frac{1}{2}} \Big|_{t=0}^{t=2\pi}$

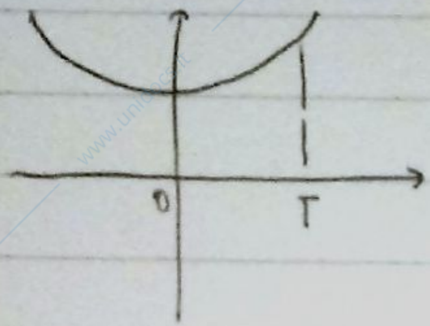
$= 2\sqrt{2} \, (1 + \cos(t))^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\pi} - 2\sqrt{2} \, (1 + \cos(t))^{\frac{1}{2}} \Big|_{\pi}^{2\pi} = 8\sqrt{2}$

Esercizio

Calcolare la lunghezza del grafico della funzione

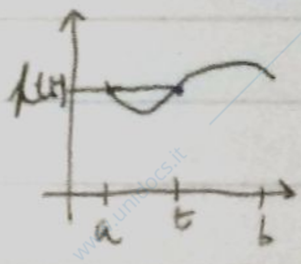
$f:[0,T] \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(t) = \cosh(t)$$



Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione il grafico di f è il sostegno della curva

$$r:[a,b] \to \mathbb{R}^2$$
$$r(t) = (t, f(t))$$



→ La lunghezza del grafico di f è:

$$\int_a^b \|r'(t)\|\, dt = \int_a^b \|1, f'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dt$$

$f'(t) = \operatorname{senh}(t)$ $\quad \displaystyle\int_0^T \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(t)}\, dt = \int_0^T \cosh(t)\, dt = \operatorname{senh}(t)\Big|_0^T$

non dobbiamo preoccuparci perché $\cosh(t) > 0 \ \forall t$

$= \operatorname{senh}(T)$

FUNZIONI DI n VARIABILI

Sono funzioni tipo $f: D \to \mathbb{R}$ dove $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n>1)$

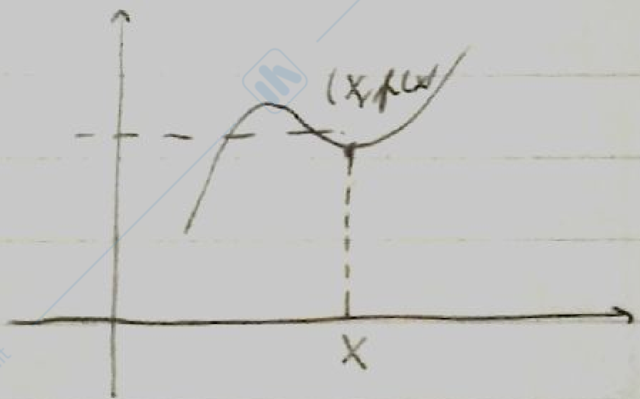
$F((x_1, \dots x_n)) = f(x_1, \dots x_n)$

(es) • $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$f(x,y,z) = \cos(xyz)$ è una

funzione di 3 variabili

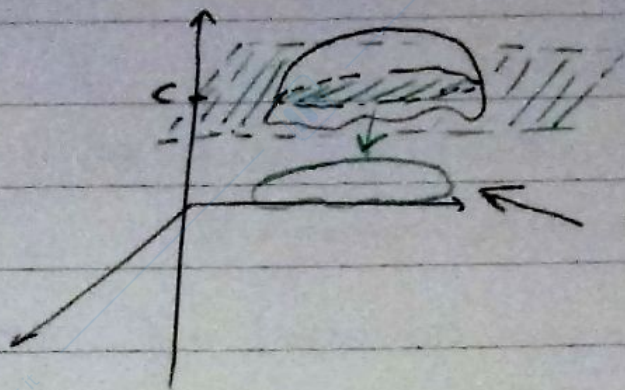
Grafico di una funzione di due variabili



Se $f: I \to \mathbb{R}$ è una funzione di una variabile allora il suo grafico è l'insieme delle coppie (x,y) per cui $y = f(x)$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Curve di livello



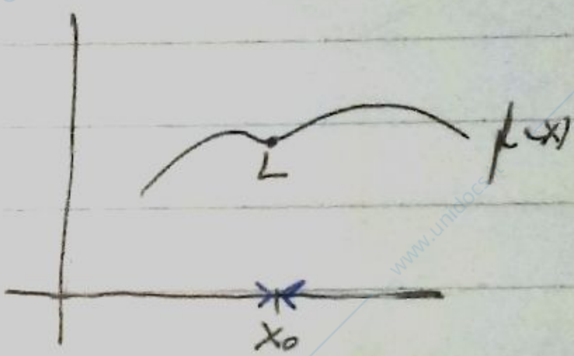
CURVA DI LIVELLO

proiezione sul piano xy dell'intersezione del grafico con il piano $z = c$

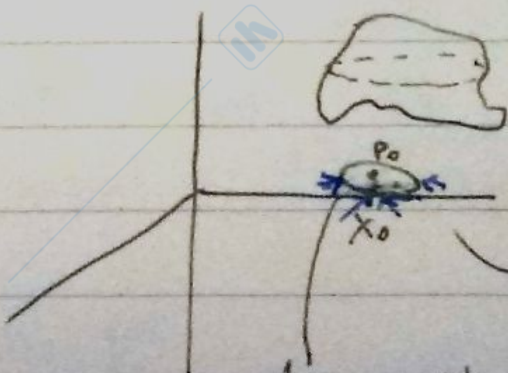
Intorni

Se per una funzione a 1 variabile il limite era

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



Per una funzione a 2 (n) variabile abbiamo:

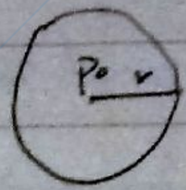


bisogna avvicinarsi in ogni modo possibili

disco aperto "di intorni"

$N_r(P_0)$

$N_r(P_0) = \{ P \mid$ distanza di P da P_0 è strett. minore di $r \}$



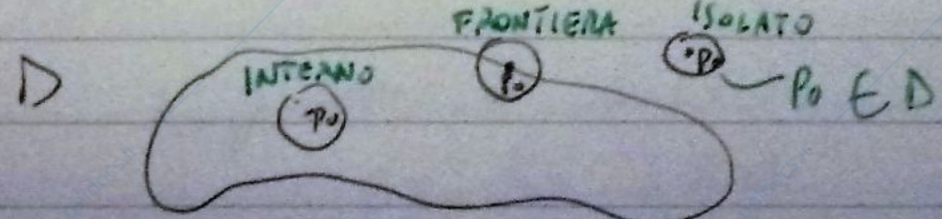
Punto interno: un punto P_0 in $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice interno se esiste un intorno di P_0 che è contenuto in D

Punto di frontiera: un punto P_0 in $\mathbb{R}^2$ si dice punto di frontiera di D se ogni intorno di P_0 contiene sia punti di D sia punti esterni a D

il punto non deve appartenere per forza a D ←

Punti isolato: un punto isolato di D se esiste un intorno di P_0 tale che P_0 è l'unico punto dell'intorno contenuto in D

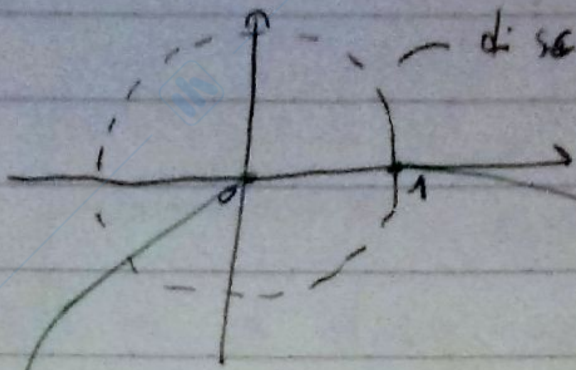
UN PUNTO ISOLATO È UN PUNTO DI FRONTIERA



→ PUNTO DI ACCUMULAZIONE =
- O È PUNTO INTERNO DI D
- O PUNTO DI FRONTIERA DI D CHE NON È ISOLATO

Es.

1. sia $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$

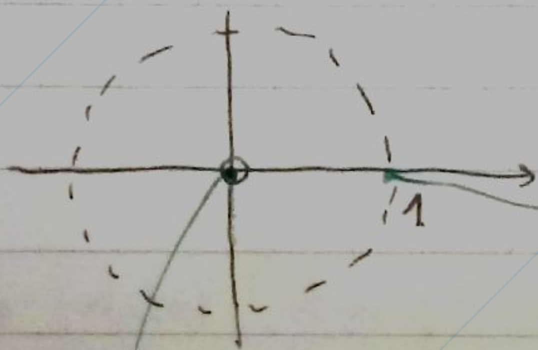


disco aperto (senza frontiera)

(0,0) è PUNTO INTERNO
(1,0) è PUNTO DI FRONTIERA

PUNTI DI ACCUMULAZIONE

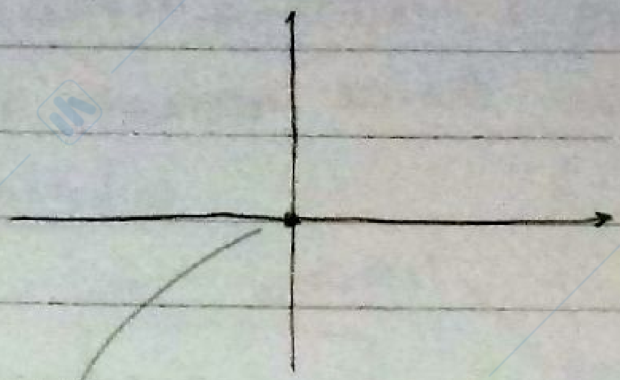
2. sia $D = \{(x,y) \mid 0<x^2+y^2<1\}$



(0,0) è PUNTO DI FRONTIERA
(1,0) è PUNTO DI FRONTIERA

PUNTI DI ACC.

3: Sia $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2=0\}$



↳ $(0,0)$ è PUNTO ISOLATO → NON è PUNTO DI ACC.
(È DI FRONTIERA)

Limite di una funzione a 2(n) variabili

Il limite è definito solo sui punti di accumulazione

Funzione continua

Data una funzione di due variabili $F: D \to \mathbb{R}$ e un punto (x_0, y_0) si dice che è continua se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = F(x_0,y_0)$$

↳ provare a fare
Esercizio difficile