Analisi Matematica 2
XI esercitazione

1. PROBLEMA Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x) = x^2$. Calcolare, usando la serie di Fourier del prolungamento periodico di f, la somma delle serie

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{h^2}, \quad \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{h^2}.$$

2. PROBLEMA Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x) = x^2$ e $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $g(x) = x$.

(1) Calcolare, usando la serie di Fourier del prolungamento periodico di f, la serie di Fourier del prolungamento periodico di g.
(2) Sia $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definita ponendo $h(x) = x^3$. Calcolare, usando le serie di Fourier dei prolungamenti periodici di f e g, la serie di Fourier del prolungamento periodico di h.

3. PROBLEMA Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x) = x^2$. Calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

usando la serie di Fourier del prolungamento periodico di f.

4. PROBLEMA Per ciascuna delle seguenti serie determinare quali convergono puntualmente e quali convergono totalmente.

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $x \in [-1, 1]$.
(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$, $x \in [-1, 1]$.
(3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} x^n$, $x \in [-1, 1]$.
(4) La serie di Fourier del prolungamento periodico di $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \pi \\ 0 & \pi \le x < 2\pi \end{cases}.$$

(5) La serie di Fourier del prolungamento periodico della funzione definita su $[0, 2)$ tale che $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

5. PROBLEMA Determinare se la serie $\sum \frac{\cos(nx)}{n+1}$ converge puntualmente in $(0, 2\pi)$. In $[0, 2\pi]$?

6. PROBLEMA Sia f la funzione definita ponendo $f(x) = \cos x + 1 - |x|$ su $[-\pi, \pi)$.

(1) Calcolare la serie di Fourier del prolungamento periodico di f.
(2) La serie converge puntualmente, in media quadratica, totalmente?

7. PROBLEMA Sia f la funzione periodica di periodo 2π pari e tale che $f(x) = 2 - x$ su $[0, \pi)$.

(1) Calcolare la serie di Fourier di f.
(2) La serie converge in media quadratica, puntualmente, totalmente?
(3) La serie delle derivate converge totalmente?

8. PROBLEMA Usando la serie di Fourier della funzione 2π-periodica tale che $f(x) = x$ su $[-\pi, \pi)$, calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

9. PROBLEMA Sviluppare in serie di Fourier il prolungamento periodico di $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ e dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

10. PROBLEMA Sviluppare in serie di Fourier il prolungamento periodico di $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x|+x}{2}$ e determinare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

11. PROBLEMA Calcolare la serie di Fourier del prolungamento periodico di $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \pi < x \le 0 \\ 2x & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

La serie converge puntualmente, in media quadratica, totalmente?

12. PROBLEMA Calcolare la serie di Fourier del prolungamento periodico di $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - 2\pi(\sin(2x))^3$.

La serie converge puntualmente, in media quadratica, totalmente? La serie derivata converge totalmente?

1

No. ES. ANALISI 2

Date 19 . 12 . 19

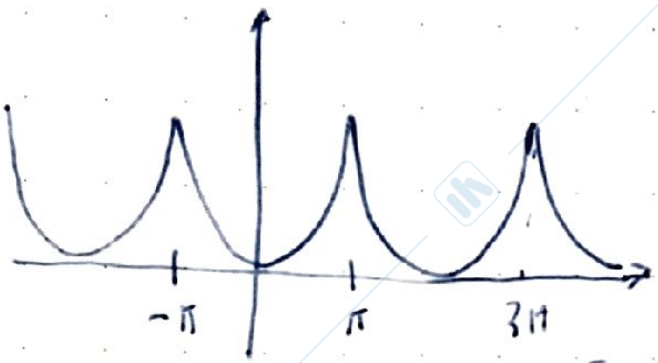
1) Sia $f:[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

Calcolare la serie di Fourier del prolungamento periodico di f, la somma delle serie

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{h^2}, \quad \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{h^2}$$

$$S[F] = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^h \, 4}{h^2} \cos(hx)$$

(libro Bramanti Pagani Salsa p. 392)



continua in $[-\pi,\pi]$

$f(x)=x^2$ $\quad f'(x)=2x$ in qualsiasi punto

tra $[-\pi,\pi]$ $f'(x)$ è limitata (punto angoloso ma non cuspide)

$\Rightarrow$ $f(x)$ regolare a tratti

$\Rightarrow$ La Serie di Fourier converge puntualmente alla funzione

$x_0 \in (-\pi, \pi)$ ogni punto converge a

$$\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

dove $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ se $x_0 = -\pi, \pi$

poniamo $x_0 = 0$

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0) = 0$$

$$\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} = \frac{\cancel{2} f(x_0)}{\cancel{2}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$S[F](0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4}{n^2} \cos(0)$$

$$\Downarrow$$

e otteniamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

se facciamo invece $x_0 = \pi$ $\qquad \dfrac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = f(\pi)$

$$S[F](\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4 \cdot (-1)^n}{n^2} \qquad f(\pi) = \pi^2$$

3 Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 19 12 19

$$\rightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

2) Usare la serie di Fourier del prolungamento F periodico di $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ per calcolare la serie di Fourier del prolungamento periodico G di $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ $g(x) = x$

$$S[F] = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

$f(x) = x^2 \in C^1([-\pi, \pi])$

$f'(x) = 2x$ è regolare a tratti

f soddisfa la condizione di raccordo

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

$$\Downarrow$$

sia H il prolungamento periodico di $f'(x)$

$\Rightarrow S[H] = S[F]$ derivata termine a termine

Allora abbiamo che:

Se H = prol. per. di $2x$

$$S[H] = 4\sum_{h=1}^{h} \frac{(-1)^h}{h^2}\left(-h\sin(xh)\right) = -4\sum_{h=1}^{h} \frac{(-1)^h}{h}\sin(hx)$$

Quindi se vogliamo la serie del prol. per. G di ~~2~~ x otteniamo

$$S[G] = -2\sum_{h=1}^{h} \frac{(-1)^h}{h}\sin(hx)$$

3) Usare la serie del prol. periodico F di $f(x)=x^2$ per calcolare la serie del prolungamento periodico di x^3

$$S[F] = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{h^2}\cos(hx)$$

Osservo che: serie di coefficienti converge

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^h}{h^2}\right| = \sum \frac{1}{h^2} \text{ converge} \longrightarrow \Downarrow$$

Serie di Fourier converge totalmente

l'integrale della serie = alla serie degli integrali

$$\int_0^x S[F] = \int_0^x \frac{\pi}{3}\,dt + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\int_0^x \cos(nt)\,dt =$$

$$= \frac{\pi^2}{3}x + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$$

se $\quad x \in [-\pi,\pi] \quad x^2 = S[F](x)$

$$\int_0^x S[F](t)\,dt = \int_0^x t^2\,dt = \frac{1}{3}x^3$$

$$\frac{1}{3}x^3 = \frac{\pi^2}{3}x + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$$

$$\underbrace{x^3 - \pi^2 x} = 12\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$$

soddisfa la condizione di raccordo

<u>Consideriamo:</u>

$f(x) = x^3 - \pi^2 x \qquad b_n(f)$ coefficienti di Fourier di f

$$S[f] = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nx)$$

$S[f] = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nx)$

$S[f'] =$ SERIE DERIVATE $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\, n\cos(nx)$

$f'(x) = (x^3 - \pi^2 x)' = 3x^2 - \pi^2$

$S[f'] = 3\left(\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\right) - \pi^2$

$= 12 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$

$\Rightarrow b_n(f)\, n = 12\frac{(-1)^n}{n^2}$

$\hookrightarrow b_n(f) = \frac{12(-1)^n}{n^3}$

Riassumendo:

PROL. PERIODICO DI x	PROLUNG. PER. DI $x^3-\pi^2 x$ E SERIE
$S[G] = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$	$12\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$

7 | Mo Tu We ~~Th~~ Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 19 · 12 · 19

$$b_h(x^3) = b_h(x^3 - \pi^2 x) + b_h(\pi^2 x)$$

$$b_h(x^3) + \pi^2 b_h(x) = \frac{12(-1)^h}{h^3} + \pi^2\left(\frac{-2\cdot(-1)^h}{h}\right)$$

$$S[x^3] = \sum_{h=1}^{+\infty}\left[\frac{12(-1)^h}{h^2} - \frac{2\pi^2(-1)^h}{h}\right]\sin(hx)$$

4. Usare la serie di Fourier del prolungamento periodico di $f(x) = x^2$ per calcolare la somma della serie $\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{1}{h^4}$

$$S[f] = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(-1)^h}{h^2}\cos(hx)$$

So utilizziamo l'uguaglianza di Parseval:

ossia

$$\int_0^T f(x)^2\,dx = \frac{T}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{h=1}^{+\infty} a_h^2 + b_h^2\right]$$

Allora avremo:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x^2)^2\,dx = \pi\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\pi^2\right)^2}{2} + \sum_{h=1}^{+\infty}\left(\frac{4(-1)^h}{h^2}\right)^2\right.$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3} \qquad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 19 12 19

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{5}[\pi^5-(-\pi)^5] = \frac{2}{5}\pi^5 =$$

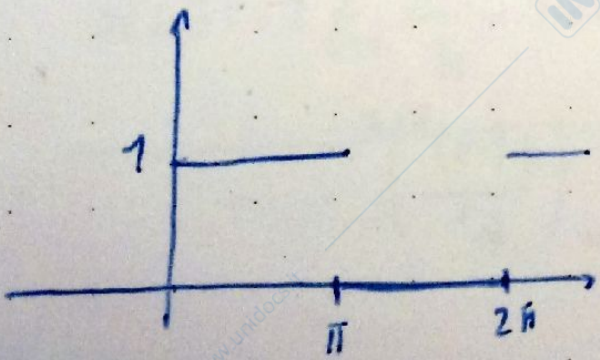
$$= \pi\left[\frac{\cancel{4}^{2}\,\frac{}{9}\pi^4}{\cancel{2}} + 16\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{1}{h^4}\right]$$

$$\frac{2}{5}\pi^5 = \frac{2}{9}\pi^5 + 16\pi\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{1}{h^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{1}{h^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

(5) Sia F il prolungamento periodico di $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<\pi\\ 0 & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

determinare se $S[F]$ converge puntualmente, in media quadratica, totalmente.



la funzione $f(x)$ è regolare a tratti:

in $[0,\pi)$ $f(x)=1$ continua, derivabile

e $\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to\pi^-} f'(x) = 0$

in $[\pi, 2\pi)$ $f(x)=0$ continua, derivabile e

$$\lim_{x\to\pi^+} f'(x) = \lim_{x\to 2\pi^-} f'(x) = 0$$

Quindi f è <u>REGOLARE A TRATTI</u>

↓

$S[F]$ converge puntualmente per ogni x

$\Rightarrow S[F]$ converge a f in media quadratica

Convergerà anche totalmente?

↳ Se $S[F](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

è converg. totalmente siccome

$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ è una funzione continua $\Rightarrow S[F](x)$ è funzione continua

Nel nostro caso

$S[F](x) = 1 \quad 0 < x < \pi$

$S[F](x) = \frac{1}{2} \quad x = \pi$ poiché $\frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{1+0}{2}$

$S[F](x) = 0 \qquad \pi < x < 2\pi$

$S[F](x) = \frac{1}{2} \qquad x = 2\pi$

$\Downarrow$

$S[F](x)$ non è continua

$\Rightarrow$ la serie non converge totalmente

(6) Sia F il prolungamento periodico di

$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(x) + 1 - |x|$

Calcolare la serie di Fourier di F.

La serie converge puntualmente, in media quadratica, totalmente?

Innanzitutto troviamo i coeff. di Fourier.

$\hookrightarrow$ solo a_n poiché f è pari $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(x) - |x|)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1+\cos(x) - x) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(x + \sin(x) - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi^2}{2}\right) = 2 - \pi$$

11

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 19.12.19

$$a_n(1+\cos(x)-|x|) = \underbrace{a_n(1+\cos(x))}_{} - \underbrace{a_n(|x|)}_{}$$

$$a_n(1+\cos(x)) = \begin{cases} 0 & \text{se } n>1 \; ** \\ 1 & \text{se } n=1 \; * \end{cases}$$

x parti

$$a_n(|x|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{G}\,\underbrace{\cos(nx)}_{f}\,dx = \cancel{\frac{x\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[+\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi)-1) =$$

$$\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$$ — se n è pari $\to 0$

— se n è dispari $n = 2n+1$

$$= -\frac{4}{\pi(2n+1)} \; *$$

$$S[F] = \frac{2-\pi}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{4}{\pi}\right)\cos(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{+4}{\pi(2n+1)^2}\cos((2n+1)x)$$

$$\frac{2-\pi}{2} = \frac{a_0}{2}$$

* ($n=1$

perchè $n>1$ ** e dispari *

Dobbiamo capire adesso i modi in cui converge

- media quadratica SI poiché è di Fourier
- puntualmente sì poiché è reg. a tratti
- totalmente

↳ in questo caso

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = 1 + \frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} < \underbrace{\sum \frac{1}{\pi n^2}}_{\text{Converge}}$

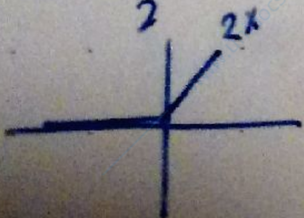
la serie dei coeff. di Fourier converge dunque

$S[f]$ converge totalmente

(7) Calcolare la serie di Fourier del prolungamento periodico di $f: [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{|x|+x}{2}$

Determinare se converge puntualmente, in media quadratica, totalmente.

$\frac{|x|+x}{2}$



$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x|+x}{2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

da $-\pi$ a 0 $f(x)=0$

$$a_n\left(\frac{|x|+x}{2}\right) = \frac{a_n(|x|)}{2} + \frac{a_n(x)}{2}$$

$\frac{a_n(x)}{2} \to 0$ poiché $f(x)=x$ è dispari

$\frac{a_n(|x|)}{2} \to$ appena calcolato

per $n=2m+1$ $\quad a_n = -\frac{2}{\pi n^2}$

$$b_n\left(\frac{|x|+x}{2}\right) = \frac{b_n(|x|)}{2} + \frac{b_n(x)}{2}$$

$\frac{b_n(|x|)}{2} \to 0$ $|x|$ pari

$\frac{b_n(x)}{2} \to$ già calcolato

$$b_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{2(-1)^n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow S[f] = \frac{\pi}{4} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\pi}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$$

Converge:

✓ media quad. (Serie di Fourier)

✓ reg. a tratti $\Rightarrow$ puntualmente

✗ totalmente

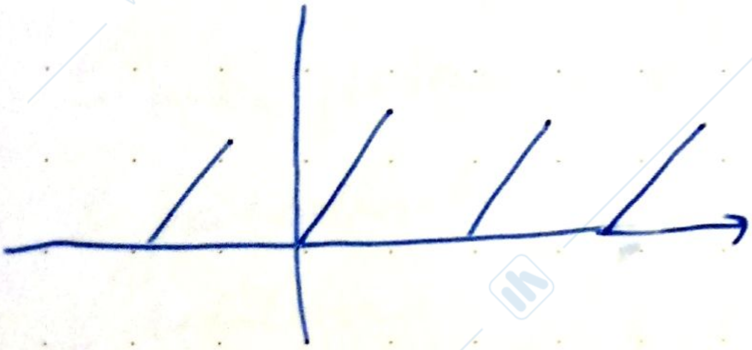
14

No.

Date 19. 12. 10

Non converge totalmente poiché:

Il prolungamento è



il limite puntuale non è una funz. continua

↳