Lezione 25/10

Estremi vincolati

Vincoli di uguaglianza

- Supponiamo di voler calcolare gli estremi di una funzione F definita solo su una curva di livello di un'altra funzione g.
- In altre parole cerchiamo il massimo e/o il minimo di F definita sull'insieme g(x,y)=b.
- In tal caso il vincolo è la curva di livello g(x,y)=b e si parla di vincolo di uguaglianza.

Ottimizzazione con vincolo di uguaglianza

- Se cerchiamo il massimo e/o il minimo di F definita sull'insieme g(x,y)=b allora si parla di problema di ottimizzazione con vincolo di uguaglianza e in simboli si scrive

$$\begin{cases} \max F \\ \text{sub} \\ g(x,y)=b \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \min F \\ \text{sub} \\ g(x,y)=b \end{cases}$$

- La funzione F è detta funzione obiettivo.

Esempio

- La terminologia e gli esempi di problemi di ottimizzazione nascono dall'economia.
- Supponiamo che un'azienda produca due beni e che il ricavo sia una funzione $R(q_1, q_2)$ delle quantità di beni prodotti. Se $c_1,\ c_2$ sono i costi unitari per produrre i due beni e b è il budget allora è economicamente interessante il problema

$$\begin{cases} \max R \\ \text{sub} \\ q_1 c_1 + q_2 c_2 = b \end{cases}$$

Metodi di soluzione

- Per risolvere problemi di ottimizzazione con vincolo di uguaglianza ci sono due metodi:
  - il primo consiste nell'esplicitare il vincolo
  - il secondo è il cosiddetto metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Esempio

- Risolvere

$$\begin{cases} \max xy \\ \text{sub} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

esplicitando il vincolo.

Moltiplicatori di Lagrange

- Teorema: Siano F e g funzioni di due variabili di classe C^1 e sia (x^*, y^*) un punto di estremo vincolato per F sotto il vincolo

$$g(x, y) = b$$

Se (x^*, y^*) è regolare per il vincolo (cioè $\nabla g(x^*, y^*) \neq 0$) allora esiste $\lambda^* \in \mathbb{R}$ per cui

$$\nabla F(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*)$$

Dimostrazione

- Parametrizziamo il vincolo con una curva regolare $\vec{r}$ tale che $\vec{r}(0)=(x^*,y^*)$. Siccome $F(\vec{r}(t))$ ha un estremo relativo in 0, abbiamo che

$$0=\frac{d}{dt}(F(\vec{r}(t)))_{|t=0}=\nabla F(x^*,y^*)\cdot\vec{r}\,'(0)$$

Quindi $\nabla F(x^*,y^*)$ è ortogonale alla curva di livello $g(x,y)=b$, ma sappiamo che anche $\nabla g(x^*,y^*)$ è ortogonale alla curva di livello. Quindi $\nabla g(x^*,y^*)$ e $\nabla F(x^*,y^*)$ hanno la stessa direzione.

Lagrangiana

- Dato un problema di ottimizzazione vincolata

$$\begin{cases} \max F \\ \text{sub} \\ g(x,y)=b \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \min F \\ \text{sub} \\ g(x,y)=b \end{cases}$$

la funzione $\mathcal{L}(x,y,\lambda)=F(x,y)-\lambda[g(x,y)-b]$
è detta funzione Lagrangiana del problema.

Osservazione

- Se il punto (x^*, y^*) è un estremo vincolato per la funzione F sul vincolo g(x,y)=b allora esiste λ^* tale che (x^*, y^*, λ^*) è un punto stazionario della funzione Lagrangiana.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

- Per risolvere un problema di ottimizzazione vincolata si procede in tre passi
  - si determinano i punti non regolari del vincolo g(x,y)=b.
  - si calcolano i punti stazionari della Lagrangiana
  - se il vincolo è chiuso e limitato si sostituiscono i punti trovati nella funzione obiettivo F e si verifica quale valore è massimo e quale minimo.

Esempio

- Risolvere i seguenti problemi

$$\begin{cases} \max xy \\ \text{sub} \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}, \begin{cases} \min xy \\ \text{sub} \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$$

Esempio

- Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \max xy \\ \text{sub} \\ x+y=k \end{cases}$$

Estremi relativi

- Per verificare se un dato punto (x^*, y^*, λ^*) stazionario per la lagrangiana dà un estremo relativo di F sul vincolo g(x,y)=b si può considerare la funzione

$$F'(x, y) = F(x, y) - \lambda^*[g(x, y) - b]$$

- F' coincide con F sul vincolo ed ha un punto stazionario in (x^*, y^*). Quindi se (x^*, y^*) è un estremo libero di F' allora è un estremo vincolato di F.

Esempio

- Calcolare gli estremi relativi della funzione

$$F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$$

soggetta al vincolo

$$2x + 3y = 1$$

Generalità sulle equazioni differenziali

- Un’equazione differenziale è un’equazione che coinvolge le derivate di una funzione incognita.
- Risolvere l’equazione consiste nel trovare le funzioni che, con le loro derivate, risolvono l’equazione
- L’insieme di tutte le soluzioni di un’equazione differenziale viene detto integrale generale dell’equazione

Esempi

y'=xy

è un'equazione differenziale ordinaria (EDO) perché la funzione incognita y è una funzione della sola variabile x.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$$

è una equazione alle derivate parziali (EDP) perché coinvolge le derivate parziali di una funzione incognita F di più variabili.

- Noi considereremo solo EDO.

Ordine delle EDO

- L’ordine di una EDO è il massimo ordine delle derivate della funzione incognita.
- $y'=xy$ è un’equazione del I ordine
- $y''+2y'-y=0$ è un’equazione del secondo ordine

Modelli differenziali

- La traduzione matematica delle leggi che governano fenomeni fisici, biologici, economici consiste molto spesso nello scrivere equazioni differenziali. Si parla in questo caso di modelli differenziali.
- Per una discussione dei modelli differenziali del II ordine vedere il MOOC.

EDO del II ordine

- Una EDO del II ordine in forma normale è l'equazione $y'' = F(x, y, y')$

dove F è una funzione di tre variabili. Il problema di Cauchy al II ordine è il sistema

$$\begin{cases} y'' = F(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$