es. "Applicazione test delle rette"

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{esiste ?}$$

$$f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \frac{t\cos\theta + t\sin\theta}{t\cos\theta - t\sin\theta}$$

$$\hookrightarrow \lim_{t\to0^+} \frac{t\cos\theta + t\sin\theta}{t\cos\theta - t\sin\theta} = \lim_{t\to0^+} \frac{\cancel{t}(\cos\theta+\sin\theta)}{\cancel{t}(\cos\theta-\sin\theta)} = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

NON ESISTE $\Leftarrow$ dipende da θ

es "Non sufficienza del test delle rette"

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad \text{ESISTE ?}$$

$$\lim_{t\to0^+} \frac{t^3\cos^2\theta\sin\theta}{t^4\cos^4\theta + t^2\sin^2\theta} = \lim_{t\to0^+} \frac{t\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta} = 0$$

$\hookrightarrow$ se $\sin\theta \neq 0$

se $\sin\theta = 0$

$$\lim_{t\to0^+} \frac{t\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta} = \lim_{t\to0^+} \frac{0}{t^2\cos^4\theta} = 0$$

indipendente da θ

$\downarrow$

ma non significa lim. esiste

in questo caso non esiste $\leftarrow$

Non esiste poiché dovrebbe funzionare con qualsiasi curva

$\hookrightarrow_{t\to 0} f(t, t^2)$

$$\lim_{t\to 0^+} f(t, t^2) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

il limite non esiste $\Longleftarrow$ diverso dalle altre curve

TEST DELLE COORDINATE POLARI

Se fallisce il test delle rette possiamo usare questo test

Se esiste θ tale che

$$\lim_{t\to 0^+} f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) = L$$

allora $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ se e solo se

$$\lim_{t\to 0^+} \left[\sup_{\theta} |F(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - L| \right] = 0$$

No. ANALISI 2

Date 01 . 10 . 19

→ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ESISTE?
↳ SE SÌ CALCOLARLO

Applico test rette → è indipendente da θ
↓
Applico test coordinate polari

so ai

$$\lim_{t\to 0^+} f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) = L$$

(non dipende da θ)

Cerco una funzione $c(t)$

$$|f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - L| \leq c(t)$$

tale che $\lim_{t\to 0^+} c(t) = 0$

in questo caso

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

es. Verificare che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

TEST RETTE

indip. da θ

↳ $\lim_{t\to 0^+} f(t\cos\theta, t\sin\theta) =$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{\cancel{3}}\cos^2\theta \sin\theta}{\cancel{t^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \lim_{t\to 0^+} t\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ANALISI 2

Date 01. 10. 19

→ TEST COORD. POLARI:

$$|f(t\cos\theta, t\sin\theta) - L|$$

$$|t\cos^2\theta\sin\theta - 0|$$

il Problema è trovare questa

$$= |t\cos^2\theta\sin\theta| \le |t|$$

$$\lim_{t\to 0^+} |t| = 0$$

esiste

$$\longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

DERIVATE PARZIALI

Ipotesi: Calcoleremo le derivate parziali in un punto interno del dominio. $(x_0, y_0) \in D$

teniamo y_0 fissata ←
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h}$$

teniamo x_0 fissato ←
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0, y_0+h) - F(x_0, y_0)}{h}$$

es. $F(x,y) = e^{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \text{ in } (0,0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 2 \cdot 0 \cdot e^{0+0} = 0$$

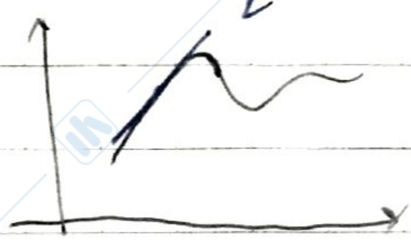
Oss. Se il dominio è aperto è sensato fare la derivata su tutti i punti del dominio.

Approssimazione lineare

In una variabile:

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

approssimazione lineare



Quindi $\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - L(x)|}{|x - x_0|} = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$$

Approssimazione lineare in 2 variabili:

$$L(x,y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

F deve essere derivabile in (x_0, y_0)

il che significa che esistono

$$\frac{\partial F}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

Se F è derivabile in (x_0,y_0) si dice che F è differenziabile in (x_0,y_0) se:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|F(x,y) - L(x,y)|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0$$

condizione più forte rispetto al teorema per una funzione a 1 variabile

Teorema: Se F è differenziabile in (x_0, y_0) allora F è continua in (x_0, y_0)

↳ Dimostrazione: SU SLIDE

es. "Funzione derivabile, ma non differenziabile"

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$ non esiste (da es. precedenti)

quindi $f(x,y)$ non continua in $(0,0)$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

e anche $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ esiste ed è $=0$

ma non è continua in $(0,0)$ quindi non può essere differenziabile in $(0,0)$

Verifica di differenziabilità

→ Teorema del differenziale totale:

se esistono le derivate parziali, di una funzione di due variabili dove (x_0, y_0) è un punto interno di D, in (x_0, y_0) e sono continue in (x_0, y_0) allora F è differenziabile in (x_0, y_0)

→ Dimostrazione:

$$F(x,y) - F(x_0,y_0) = \underbrace{F(x,y) - F(x_0,y)}_{\text{sommo}} + \underbrace{F(x_0,y) - F(x_0,y_0)}_{\text{e tolgo}}$$

per teorema della media di Lagrange

$$F(x,y) - F(x_0,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(\xi_x, y)(x - x_0)$$

$$+$$

$$F(x_0,y) - F(x_0,y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \eta_y)(y - y_0)$$

e poi slide

es. Verificare che F è diff. in (1,1):

$$F(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$$

~~non~~ calcoliamo il limite

ma facciamo il teorema del diff. totale

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{6 - x^2 - y^2}} (-\cancel{2}x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}$$

in (1,1) denominatore $\neq 0$

$\Downarrow$

esistono in un intorno di (1,1)

↳ sono anche continue (composte di continue)

F è differenziabile $\Longleftarrow$