Se le f_n sono integrabili e continue allora f è integrabile e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)\right) dx = \sum \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Dimostrazione

$$|f_n(x)| \leq C_n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n < +\infty$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\,dx \right| \leq \int_a^b \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|\,dx \leq \int_a^b \sum_{k=n+1}^{+\infty} C_k\,dx =$$

$$= (b-a) \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} C_k}_{\text{resto serie convergente}}$$

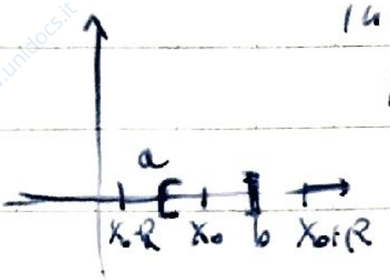
$C_n \to 0$ per $n \to +\infty$

es Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

che converge in un intervallo chiuso contenuto in (x_0-R, x_0+R)

R ↓ raggio di convergenza



Infatti

$$r=\max\left(|a-x_0|, |b-x_0|\right)$$

↳ $r<R$ e $|a_n(x-x_0)^n| \le |a_n| r^n < +\infty$

↓

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge totalmente es. Se consideriamo la serie delle derivate

$$\sum n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

La serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza della serie $\sum a_n (x-x_0)^n$

↓

Ad esempio:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \qquad R = \frac{1}{L}$$

e consideriamo

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n a_n} = \overbrace{\lim_{n \to +\infty} (\sqrt[n]{n})}^{\to 1} \overbrace{\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}}^{\to L} = 1 \cdot L \cdot L$$

$$R = \frac{1}{L}$$

=

Conclusione: Se l'intervallo $[a,b] \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$ allora sia la serie $\sum a_n (x-x_0)^n$ che la serie delle derivate $\sum n a_n (x-x_0)^{n-1}$ convergono totalmente.

$\Rightarrow$ Se $f(x) = \sum a_n (x-x_0)^n$ in $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

allora $f'(x) = \sum n a_n (x-x_0)^{n-1}$

E l'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum \int_a^b a_n (x-x_0)^n\,dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\Big|_a^b$$

Criterio di Abel: Se abbiamo R = raggio di convergenza e sappiamo che converge sugli estremi quindi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n \quad \text{converge}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim_{x \to R^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)$$

e analogamente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n = \lim_{x \to -R^+} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)$$

es. $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ $\quad R = 1$

$\hookrightarrow -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1^+} \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$$

Convergenza serie trigonometriche

Se $\sum_{h=0}^{+\infty} (|c_h| + |d_h|)$ converge allora la serie trigonometrica

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{h=1}^{+\infty} (c_h \cos(hx) + d_h \sin(hx))$$

converge totalmente in $[0, 2\pi]$

poiché

$$|c_h \cos(hx) + d_h \sin(hx)| \leq |c_h||\cos(hx)| + |d_h||\sin(hx)| \leq$$

$$\leq |c_h| + |d_h|$$

$\hookrightarrow$ se $\sum_{h=1}^{\infty} (|c_h| + |d_h|) < +\infty$

Allora la serie converge totalmente

Teorema: se a_n è monotona decrescente e tende a 0 allora

$$\sum a_n \cos(nx) \quad a_n \text{ decrescente}, \; a_n \to 0$$

allora

$$\sum a_n \cos(nx) \text{ converge in } (0, 2\pi)$$

per $x=0$ $\cos(nx)=1$

$x=0$ $\sum a_n \cos(nx) = \sum a_n$

$\sum a_n \sin(nx) = 0$ per $x = 0, 2\pi$

Consideriamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(nx) \text{ converge in } (0,2\pi)$$

ma $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(nx)$ non è una serie di Fourier perché $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum \left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$

No. ANALISI 2

Date 17 12 19

Consideriamo ora

$$f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = x \quad \to \text{dispari}$$

F prolungamento periodico di f

$$a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{x}_{G}\,\underbrace{\sin(nx)}_{f}\,dx \underset{\text{per parti}}{=} \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\,x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n}\cos(nx)\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos(n\pi)\,\pi + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_0^\pi\right) =$$

$$= \frac{2}{\cancel{\pi}}\left(-\frac{1}{n}(-1)^n\cancel{\pi}\right) = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

$$f \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

Oss. La funzione converge alla serie di Fourier solo in media quadratica non per forza puntualmente

↓

infatti in questo caso

$f(\pi) \to \pi$

$S[f](\pi) = 0$

Serie di Fourier

Esistono delle funzioni chiamate regolari a tratti

↓

continue, ma in dei punti finiti ci possono essere discontinuità a tratti o punti angolosi (non asintoti o cuspidi)

Nell'esempio precedente — Teorema slide

$f(\pi^-) = \pi \qquad f(\pi^+) = -\pi$

$$S[f](\pi) = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$$

Se f è continua in $[0,T]$ è regolare a tratti

$f(x_0^+) = f(x_0^-)$ per ogni $x_0 \in [0,T)$

$$\Rightarrow S[f](x) = f(x_0)$$

Se inoltre $f(0) = f(T)$

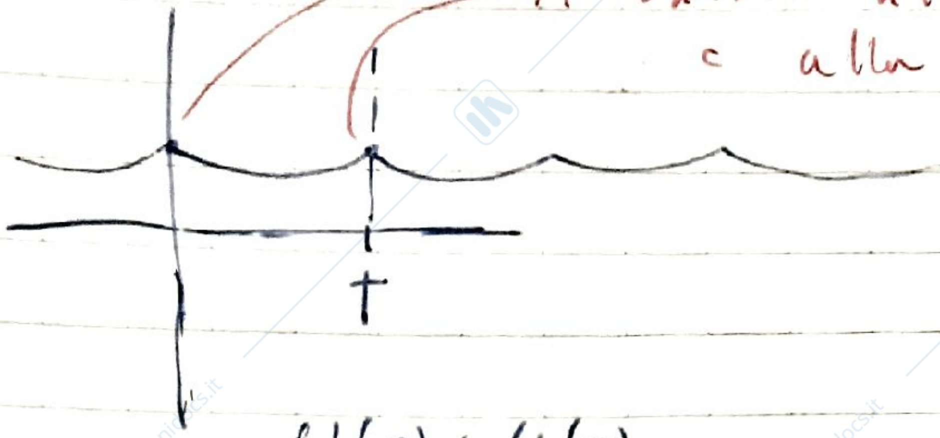
$$S[f](x_0) = f(x_0) \quad \text{per ogni } x_0$$

Monotone a tratti

f monotona a tratti = che si può suddividere in un numero finito di intervallini su cui f è monotona

Stesso Teo di prima

Derivabilità della Serie di Fourier



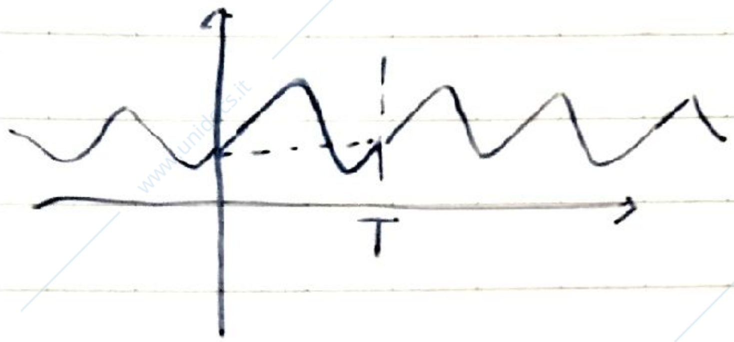
il valore all'inizio e alla fine devono essere uguali

⇓

così almeno il prolungamento periodico è continuo

$f'(0) \neq f'(T)$

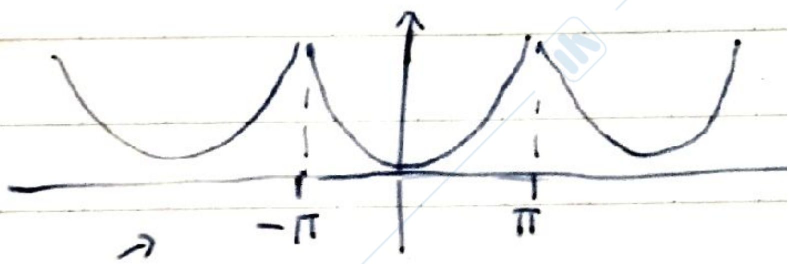
Se c'è raccordo anche sulle derivate avremo:



$f'(0) = f'(T)$

es. $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$



F prolungamento periodico di f

$f'(x) = 2x$ regolare a tratti

$f(-\pi) = f(\pi)$

$b_h = 0 \longrightarrow f$ pari

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$a_h = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{x^2}_{G}\,\underbrace{\cos(hx)}_{f}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\overset{0}{\cancel{\frac{x^2\sin(hx)}{h}}}\Bigg|_0^\pi - \frac{2}{h}\int_0^\pi \sin(hx)\,x\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\left(-\frac{2}{h^2}x\cos(hx)\Big|_0^\pi - \left[-\frac{2}{h^2}\int_0^\pi \cos(hx)\,dx\right]\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{h^2}\pi\cos(h\pi)\right) + \frac{2}{\pi}\cancel{\frac{\sin(hx)}{h}}\Bigg|_0^\pi = \frac{4}{h^2}(-1)^h$$

$$f \sim \frac{\pi^3}{3} + 4\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(-1)^h}{h}\cos(hx)$$

So prendiamo $f'(x) = 2x$ se facciamo la serie del prolungamento periodico G di $f'(x)$

$$S[G] = 4\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(-1)^h}{h^2}\left(-\frac{1}{h}\sin(hx)\right) =$$

$$= 4\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{h+1}}{h}\sin(hx)$$

12

No. ANALISI 2

Date 17. 12. 19

Avevamo calcolato che la serie di Fourier del prolungamento periodico G in

$g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \qquad g(x) = x$

$$S[G] = \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$