

Lezione 22/11

Integrali di linea

Problema

- Come abbiamo visto nell'esempio può succedere che per un campo che soddisfa la condizione necessaria non si riesce a trovare un potenziale in modo diretto.
- Per verificare se esiste un potenziale si introduce l'integrale di un campo lungo un arco liscio.

Archi lisci

- Sia D un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 . Un arco liscio (o curva liscia) in D è una curva $r: [a, b] \rightarrow D$ differenziabile e regolare tale che $r'(t)$ è continua in $[a, b]$.
- Un arco liscio a tratti è una curva continua $r: [a, b] \rightarrow D$ che è un arco liscio tranne che in un numero finito di punti.

Integrale di linea di seconda specie

- Sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale e sia $r : [a, b] \rightarrow D$ un arco liscio. Si definisce l'integrale di linea di F lungo l'arco r come

$$\int_r F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

- Se $r : [a, b] \rightarrow D$ è un arco liscio a tratti si definisce $\int_r F \cdot dr$ come la somma degli integrali di linea sui tratti lisci.

Circuitazione

- Se l'arco $r: [a, b] \rightarrow D$ è una curva chiusa, cioè $r(a)=r(b)$, allora l'integrale di linea di un campo F su r viene chiamata circuitazione e la si indica con

$$\oint_r F \cdot dr$$

Esempio

- Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo definito ponendo

$$F(x, y) = (2x + y, -x + 1)$$

e sia $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'arco liscio definito ponendo

$$r(t) = (\cos t, \sin t)$$

calcolare $\oint_r F \cdot dr$.

Esempio

- Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo definito ponendo

$$F(x, y) = (2x + y, -x + 1)$$

e sia $\mathbf{r} : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'arco liscio a tratti definito ponendo

$$r(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & \text{se } 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t, 1) & \text{se } 2 \leq t \leq 3 \\ (0, 4-t) & \text{se } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

calcolare $\oint_r F \cdot dr$.

Interpretazione fisica

- Se un campo vettoriale F è un campo di forze allora l'integrale di linea $\int_r F \cdot dr$ è il lavoro compiuto dal campo su un punto materiale che si muove sulla curva r .

Dipendenza dalla parametrizzazione

- Sia $F : D \rightarrow B$ un campo vettoriale e sia $r : [a, b] \rightarrow D$ un arco liscio. Supponiamo di cambiare parametrizzazione all'arco. Questo significa che cambiamo la variabile t ponendo $t=t(s)$ dove s è un nuovo parametro e $t : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ è una funzione invertibile e derivabile.

L'arco con la nuova parametrizzazione è la curva

$$r_1(s) = r(t(s))$$

Dipendenza dalla parametrizzazione

- Se t è crescente allora

$$\int_r F \cdot dr = \int_{r_1} F \cdot dr_1$$

- Se t è decrescente allora

$$\int_r F \cdot dr = - \int_{r_1} F \cdot dr_1$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\int_{r_1} F \cdot dr_1 &= \int_{a'}^{b'} F(r_1(s)) \cdot r_1'(s) ds = \int_{a'}^{b'} F(r(t(s))) \cdot (r(t(s)))' ds \\ &= \int_{a'}^{b'} F(r(t(s))) \cdot (r(t(s)))' ds = \int_{a'}^{b'} F(r(t(s))) \cdot (r'(t(s))) t'(s) ds \\ &= \int_{t(a')}^{t(b')} F(r(t)) \cdot r'(t) dt\end{aligned}$$

- Se $t : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ è crescente allora $t(a') = a$, $t(b') = b$ e quindi $\int_{r_1} F \cdot dr_1 = \int_r F \cdot dr$
- Se $t : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ è decrescente allora $t(a') = b$, $t(b') = a$ e quindi $\int_{r_1} F \cdot dr_1 = -\int_r F \cdot dr$

Integrale di linea di un campo conservativo

- Teorema: Sia $F : D \rightarrow B$ un campo conservativo e sia $r : [a, b] \rightarrow D$ un arco liscio. Sia Φ un potenziale del campo.

Allora, se $P=r(a)$ e $Q=r(b)$,

$$\int_r F \cdot dr = \Phi(Q) - \Phi(P)$$

In particolare, l'integrale di linea non dipende dall'arco ma solo dai suoi estremi e, inoltre,

$$\oint_r F \cdot dr = 0$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\int_r F \cdot dr &= \int_a^b F(r(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \nabla \Phi(r(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \Phi(r(t)) dt = \Phi(r(b)) - \Phi(r(a)) = \Phi(Q) - \Phi(P)\end{aligned}$$

Esercizio

- Verificare se il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito ponendo

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

è conservativo.

Lavoro di un campo di forze conservativo

- Se il campo F è un campo di forze e F è conservativo allora troviamo che il lavoro compiuto dal campo lungo la curva r è la differenza di potenziale sugli estremi della curva.

Applicazione dell'integrale di linea

- L'integrale di linea di un campo fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché il campo sia conservativo.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo sia conservativo

- Teorema: Sia $F : D \rightarrow B$ un campo vettoriale. Allora sono equivalenti
- Il campo F è conservativo
- $\oint_r F \cdot dr = 0$ per ogni curva chiusa liscia a tratti in D .
- Se r è un arco liscio a tratti in D , $\int_r F \cdot dr$ non dipende dall'arco r ma solo dai suoi estremi.

Quando la condizione necessaria è sufficiente?

- La condizione necessaria e sufficiente che abbiamo appena visto è una condizione impossibile da verificare praticamente.
- D'altra parte la condizione che il rotore sia nullo è una condizione facile da verificare, ma solo necessaria.
- Problema: ci sono situazioni in cui la condizione necessaria è anche sufficiente?

Domini semplicemente connessi

- Il fatto che la condizione sul rotore sia anche sufficiente dipende da come è fatto il dominio del campo.
- Diremo che un dominio è semplicemente connesso se è connesso e ogni curva continua chiusa contenuta in D può essere deformata continuamente a un unico punto senza farla uscire da D .

Teorema difficile

- Un campo definito su un dominio D semplicemente connesso è conservativo se e solo se il suo rotore è nullo.

Come si fa a verificare se un dominio è semplicemente connesso

- In generale verificare che un sottoinsieme del piano è semplicemente connesso è molto difficile.
- Per particolari insiemi però questa verifica è molto facile: questi insiemi sono gli insiemi stellati.

Insiemi stellati

- Un sottoinsieme D di \mathbb{R}^2 è detto stellato se esiste un punto P_0 di D tale che per ogni punto P di D , il segmento che congiunge P a P_0 è contenuto in D .

Teorema

- **Gli insiemi stellati sono semplicemente connessi.**

Conseguenza

- Teorema: Sia D un insieme stellato aperto e sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale

Allora sono equivalenti

1. F è conservativo
2. $\nabla \times F = \vec{0}$.

Quindi, se il dominio del campo è stellato, la condizione necessaria è anche sufficiente.

Campi conservativi su insiemi connessi

- Se il dominio D di un campo conservativo F è connesso e Φ, Ψ sono due potenziali del campo allora essi differiscono per una costante:

$$\Psi = \Phi + C$$

- Dimostrazione: Fissato un punto (x_0, y_0) in D allora, dato un punto qualsiasi (x, y) , esiste un arco r che congiunge (x_0, y_0) a (x, y) . Abbiamo quindi che

$$\Phi(x, y) = \int_r F \cdot dr + \Phi(x_0, y_0) = \Psi(x, y) - \Psi(x_0, y_0) + \Phi(x_0, y_0) = \Psi(x, y) + C$$

Esercizio

- Sia $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ e sia F il campo definito su D ponendo

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Verificare che il campo è conservativo e calcolarne un potenziale.