

Analisi Matematica 2

Prova simulata

1. PROBLEMA Sia $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^4 < \pi\}$. Sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + yx^2}{\sin(x^2 + y^4)} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Verificare se F è continua in $(0, 0)$.

2. PROBLEMA Calcolare i punti sulla curva di equazione

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} = 1$$

in cui la retta tangente è ortogonale alla retta di equazione $2x - y = 0$.

3. PROBLEMA Calcolare i punti sull'ellisse di equazione $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ aventi distanza minima dall'origine.

4. PROBLEMA Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 7y' + 10y = 2e^{2x} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Risoluzione Prova Simulata

PROBLEMA 1. Per studiare la continuità nell'origine occorre calcolare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + yx^2}{\sin(x^2 + y^4)}.$$

Poiché per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ si ha che $x^2 + y^4 \rightarrow 0$, il limite scritto sopra è uguale al limite seguente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + yx^2}{x^2 + y^4}.$$

Usiamo innanzitutto il test delle rette e calcoliamo quindi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3(\cos^3(\theta) + \sin(\theta)\cos^2(\theta))}{t^2(\cos^2(\theta) + t^2\sin^4(\theta))} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \frac{\cos^3(\theta) + \sin(\theta)\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + t^2\sin^4(\theta)}.$$

Notiamo che il limite è uguale a 0 per ogni valore di θ . Questo significa che il limite, se esiste, può essere al più uguale a 0. Ma $F(0, 0) = 1$, quindi sicuramente la funzione non è continua in $(0, 0)$.

Osservazione 1: Si poteva giungere alla stessa conclusione calcolando il limite in un solo caso particolare, ad esempio lungo la retta $x(t) = 0$, $y(t) = t$. Sostituendo nella funzione otteniamo $F(x(t), y(t)) = F(0, t) = 0$, pertanto il limite, se esiste, può valere al massimo 0.

Osservazione 2: Calcoliamo, nonostante l'esercizio non lo richieda, il limite dato. Volendo usare il metodo delle coordinate polari cerchiamo di maggiorare la funzione

$$\left| t \frac{\cos^3(\theta) + \sin(\theta)\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + t^2\sin^4(\theta)} - 0 \right|.$$

Troviamo prima di tutto un minorante per il denominatore. Poiché si tratta di una somma di termini nonnegativi, si ha che $\cos^2(\theta) + t^2\sin^4(\theta) \geq \cos^2(\theta)$. Pertanto abbiamo che

$$|t| \left| \frac{\cos^2(\theta)(\cos(\theta) + \sin(\theta))}{\cos^2(\theta) + t^2\sin^4(\theta)} \right| \leq |t| \frac{\cos^2(\theta)|\cos(\theta) + \sin(\theta)|}{\cos^2(\theta)} \leq |t| |\cos(\theta) + \sin(\theta)| \leq 2|t|.$$

Poiché il maggiorante tende a zero al tendere di t a zero, possiamo dire che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + yx^2}{\sin(x^2 + y^4)} = 0.$$

PROBLEMA 2. Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2} - 1$, allora la curva data corrisponde alla curva di livello

$$f(x, y) = 0.$$

Sappiamo che il gradiente di f in un punto generico (a, b) sulla curva è ortogonale alla tangente alla curva di livello nel punto stesso. Calcoliamo dunque il gradiente di f in (a, b) . Abbiamo

$$\nabla f(a, b) = \left(\frac{2a + b}{2\sqrt{a^2 + ab + b^2}}, \frac{a + 2b}{2\sqrt{a^2 + ab + b^2}} \right).$$

D'altra parte il vettore $(2, -1)$ ortogonale alla retta $2x - y = 0$ (si tratta del vettore dato dai coefficienti direzionali della retta in forma normale).

L'esercizio chiede che la retta tangente alla curva sia ortogonale alla retta $2x - y = 0$, questo significa che il gradiente deve essere parallelo alla curva $2x - y = 0$. Di conseguenza $\nabla f(a, b)$ deve essere a sua volta ortogonale al vettore $(2, -1)$.

Quanto detto suggerisce di imporre che il prodotto scalare tra gradiente e vettore $(2, -1)$ sia nullo. Pertanto

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla f(a, b) \cdot (2, -1) \\ &= \left(\frac{2a+b}{2\sqrt{a^2+ab+b^2}}, \frac{a+2b}{2\sqrt{a^2+ab+b^2}} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \frac{2a+b}{2\sqrt{a^2+ab+b^2}} - \frac{a+2b}{2\sqrt{a^2+ab+b^2}} \\ &= \frac{4a+2b-a-2b}{2\sqrt{a^2+ab+b^2}} \\ &= \frac{3a}{2\sqrt{a^2+ab+b^2}}. \end{aligned}$$

Poiché il denominatore non è mai nullo l'equazione da risolvere è

$$0 = 3a.$$

Quindi i punti della forma $(0, b)$ che stanno sulla curva di livello $f(x, y) = 0$ hanno retta tangente ortogonale a $2x - y = 0$. Sulla curva gli unici punti di ascissa nulla sono $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

PROBLEMA 3. Dato un punto generico del piano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la funzione che calcola la sua distanza dall'origine è

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il problema ci chiede di trovare il minimo di tale funzione vincolato alla curva $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$, cioè

$$\begin{cases} \min(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ \text{sub} \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Risolviamo l'esercizio col metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} 2x + \lambda(2x + y) = 0 \\ 2y + \lambda(2y + x) = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Il sistema ha quattro soluzioni (x, y, λ) : $(1, -1, -2)$, $(-1, 1, -2)$, $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -2/3)$, $(-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, -2/3)$. Per ciascuna di esse corrisponde un punto sulla curva e un valore di $f(x, y)$ riassunti in tabella

| (x, y) | $f(x, y)$ |
|------------------------------|--------------|
| $(1, -1)$ | $\sqrt{2}$ |
| $(-1, 1)$ | $\sqrt{2}$ |
| $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ | $\sqrt{2/3}$ |
| $(-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$ | $\sqrt{2/3}$ |

Se ne deduce che $f(x, y)$ ha minimo vincolato alla curva $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ nei punti $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ e $(-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$.

PROBLEMA 4. Per risolvere il problema di Cauchy dato occorre prima di tutto risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 7y' + 10 = 2e^{2x}.$$

Consideriamo prima l'equazione omogenea associata, cioè

$$y'' - 7y' + 10 = 0.$$

A questa corrisponde l'equazione caratteristica

$$k^2 - 7k + 10 = 0$$

che ha come soluzioni $k = 2$ e $k = 5$. Pertanto la soluzione omogenea dell'equazione differenziale é

$$y_{om} = Ae^{2x} + Be^{5x}.$$

Ora vogliamo trovare la soluzione particolare y_p mediante il metodo di somiglianza. Poich la forzante $2e^{2x}$ é linearmente dipendente con una delle due soluzioni omogenee trovate, andiamo a cercare una soluzione del tipo $y_p = Cxe^{2x}$. Sostituendola nell'equazione di partenza otteniamo

$$(2Ce^{2x} + 2Ce^{2x} + 4Axe^{2x}) - 7(Ce^{2x} + 2Cxe^{2x}) + 10(Cxe^{2x}) = 2e^{2x},$$

da cui

$$-3Ce^{2x} = 2e^{2x}.$$

Quindi la soluzione particolare é

$$y_p = -\frac{2}{3}xe^{2x}.$$

Di conseguenza la soluzione generale dell'equazione iniziale é

$$y = y_{om} + y_p = Ae^{2x} + Be^{5x} - \frac{2}{3}xe^{2x}.$$

Per concludere l'esercizio occorre imporre le condizioni del problema di Cauchy: $y(0) = -1$ e $y'(0) = 0$. A queste corrispondono le seguenti equazioni

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + 5B - \frac{2}{3} = 0. \end{cases}$$

Da cui si ottiene che $A = -\frac{2}{9}$ e $B = \frac{2}{9}$. Per concludere quindi, la soluzione a problema di Cauchy dato é

$$y(x) = -\frac{2}{9}e^{2x} + \frac{2}{9}e^{5x} - \frac{2}{3}xe^{2x}.$$

| | | | | | | |
|----|----|----|----|-----------|----|----|
| Mo | Tu | We | Th | <u>Fr</u> | Sa | Su |
|----|----|----|----|-----------|----|----|

Prova simulata

① $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < \pi\}$ $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ $F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + yx^2}{\sin(x^2 + y^2)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$F(0,0) = 1$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + yx^2}{\sin(x^2 + y^2)} \stackrel{\text{TEST RETTE}}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + yx^2}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3(\cos^3\theta + t\sin\theta\cos^2\theta)}{t^2(\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta)}$

dc $\cos\theta \neq 0$ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(\cos^3\theta + t\sin\theta\cos^2\theta)}{\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta} = 0$

Se $\cos\theta = 0$ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{0}{t^2\sin^2\theta} = 0$

non è mai 1

non è continua

per il test delle rette

dire che se il $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y) = a \neq 1$ esiste allora

Oss se $F(0,0) = 0 \rightarrow$ allora occorre fare test coord. polari

$$0 \leq \left| \frac{t \cos^2\theta (\cos\theta + t\sin\theta)}{\cos^2\theta + t^2 \sin^2\theta} - 0 \right| \leq |t| \frac{|\cos\theta + t\sin\theta|}{\cos^2\theta}$$

Se $\cos\theta \neq 0$ positivo \rightarrow se lo tolgo il denom. diventa più piccolo



| | | | | | | |
|----|----|----|----|-----------|----|----|
| Mo | Tu | We | Th | Xr | Sa | Su |
|----|----|----|----|-----------|----|----|

No. ES. ANALISI 2Date 08.11.19

$$= t |\cos \theta + \sin \theta| \leq t |\cos \theta| + |\sin \theta| \leq 2|t|$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{p(t)}$

$$\hookrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} p(t) = 0$$

$$\text{Se } \cos \theta = 0 \quad p(t) = 0 \quad \checkmark$$

(2) $\boxed{x^2 + xy + y^2 = 1}$ nella tg \perp a $2x - y = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
 $F(x, y)$

$$\nabla F(x, y) = \left(\frac{2x+y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}, \frac{2y+x}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}} \right)$$

$$\frac{2a+b}{2\sqrt{a^2+ab+b^2}} - \frac{2b+a}{2\sqrt{a^2+ab+b^2}} = 0$$

$$2a + 2b - 2b + a = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = b \end{cases} \quad p(0, b)$$

$$\sqrt{0+0+b^2} = 1 \quad |b| = 1$$

$$p(0, \pm 1)$$

3

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{F(x,y)}$

$$Q: x^2 + xy + y^2 = 1$$

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \lambda(2x+y) = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \lambda(2y+x) = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x \neq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda(2x+y) \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda(2y+x) \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} + y\lambda(2x+y) - x\lambda(2y+x) &= 0 \\ + 2xy + y^2 - 2xy - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

si per prima

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (-1, 1) \quad (1, -1)$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow \text{MINIMO ASS.}$$

$$f(-1, 1) = \sqrt{2}$$

$$f(1, -1) = \sqrt{2} \rightarrow \text{MAX ASS.}$$

giusti

oss. Come funzione obiettivo potremmo usare la distanza al quadrato



4

Mo Tu We Th X Sa Su

$$\text{Se } f(x,y) = R(x,y) = (x^2 + y^2)$$

$$\nabla F(x,y) = (2x, 2y)$$

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge \lambda \neq 0$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda(2x+y) = 0 \\ 2y + \lambda(2y+x) = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \det \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & -\lambda \\ -\lambda & 2(1-\lambda) \end{pmatrix} \Rightarrow 3\lambda = 2 \\ \lambda = 2$$

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ X = -Y \\ X = \pm 1 \\ X = \pm 1 \\ Y = \mp 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ X = Y \\ X^2 = \frac{1}{3} \\ X = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ Y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3} \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3} \rightarrow \text{MIN. ASS.}$$

$$f(1, -1) = 2 \quad f(-1, 1) = 2 \rightarrow \text{MAX ASS.}$$

$$\rightarrow \text{MINIMA} \text{ DISI } \bar{c} \quad \sqrt{\frac{2}{3}}$$

4
$$y'' - 7y' + 10y = 2e^{2x}$$

$$y(0) = -1$$

$$y'(0) = 0$$

$$k^2 - 7k + 10 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} \leftarrow \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}$$

$$y(x) = Ae^{5x} + Be^{2x}$$

$$y_p = Cxe^{2x} \quad y_p' = C e^{2x} + 2Cxe^{2x} \quad y_p'' = 2C e^{2x} + 2C e^{2x} + 4Cxe^{2x}$$

$$4Cxe^{2x} + 4C e^{2x} - 7C e^{2x} - 14Cxe^{2x} + 10Cxe^{2x} = 2e^{2x}$$

$$-3C = 2 \quad C = -\frac{2}{3}$$

$$y(x) = Ae^{5x} + Be^{2x} - \frac{2}{3}xe^{2x}$$

$$y'(x) = 5Ae^{5x} + 2Be^{2x} - \frac{2}{3}e^{2x} - \frac{4}{3}xe^{2x}$$

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ 5A + 2B = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B - 1 \\ -5B - 5 + 2B = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$3B = -\frac{17}{3}$$

$$\rightarrow B = -\frac{17}{9}$$

$$\rightarrow A = \frac{8}{9}$$

$$y(x) = \frac{8}{9}e^{5x} - \frac{17}{9}e^{2x} - \frac{2}{3}xe^{2x}$$

Analisi Matematica 2

Prova simulata

1. PROBLEMA Sia $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^3 + x^2y^2)}{\log(x^2 + y^2 + 1)} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Verificare se F è continua in $(0, 0)$.

2. PROBLEMA Calcolare i punti sulla curva di equazione

$$\sqrt{x^2 + 3xy + y^2} = 1$$

in cui la retta tangente è parallela alla retta di equazione $x + y = 0$.

3. PROBLEMA Sia $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y) + 1$. Calcolare e classificare i punti stazionari di f .

4. PROBLEMA Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + x \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Risoluzione Prova Simulata copia

PROBLEMA 1. Per studiare la continuità nell'origine occorre calcolare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy^3 + x^2y^2)}{\log(x^2 + y^2 + 1)}.$$

Il limite scritto sopra é uguale al limite seguente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3 + x^2y^2}{x^2 + y^2}.$$

Usiamo innanzitutto il test delle rette e calcoliamo quindi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4(\cos(\theta) \sin^3(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^2(\theta))}{t^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2(\cos(\theta) \sin^3(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)) = 0.$$

Volendo usare il metodo delle coordinate polari cerchiamo di maggiorare la funzione

$$|t^2(\cos(\theta) \sin^3(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)) - 0|.$$

Abbiamo che

$$|t|^2 |\cos(\theta) \sin^3(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)| \leq |t|^2 (|\cos(\theta) \sin^3(\theta)| + |\cos^2(\theta) \sin^2(\theta)|) \leq 2|t|^2.$$

Poiché il maggiorante tende a zero al tendere di t a zero, possiamo dire che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy^3 + x^2y^2)}{\log(x^2 + y^2 + 1)} = 0.$$

E quindi la funzione é continua in $(0, 0)$.

PROBLEMA 2. Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3xy + y^2} - 1$, allora la curva data corrisponde alla curva di livello

$$f(x, y) = 0.$$

Sappiamo che il gradiente di f in un punto generico (a, b) sulla curva é ortogonale alla tangente alla curva di livello nel punto stesso. Calcoliamo dunque il gradiente di f in (a, b) . Abbiamo

$$\nabla f(a, b) = \left(\frac{2a + 3b}{2\sqrt{a^2 + 3ab + b^2}}, \frac{3a + 2b}{2\sqrt{a^2 + 3ab + b^2}} \right).$$

D'altra parte il vettore $(1, 1)$ ortogonale alla retta $x + y = 0$ (si tratta del vettore dato dai coefficienti direzionali della retta in forma normale).

L'esercizio chiede che la retta tangente alla curva sia parallela alla retta $x + y = 0$, questo significa che il gradiente deve essere ortogonale alla curva $x + y = 0$. Di conseguenza $\nabla f(a, b)$ deve essere a sua volta parallelo al vettore $(1, 1)$.

Quanto detto suggerisce di imporre che il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{2a + 3b}{2\sqrt{a^2 + 3ab + b^2}} & 1 \\ \frac{3a + 2b}{2\sqrt{a^2 + 3ab + b^2}} & 1 \end{pmatrix}$$

sia nullo. Pertanto

$$\frac{2a + 3b}{2\sqrt{a^2 + 3ab + b^2}} = \frac{3a + 2b}{2\sqrt{a^2 + 3ab + b^2}}$$

Poiché il denominatore non è mai nullo sulla curva di livello, l'equazione diventa $a = b$. Quindi i punti della forma (a, a) che stanno sulla curva di livello $f(x, y) = 0$ hanno retta tangente ortogonale a $x + y = 0$. Sulla curva gli unici punti di questo tipo sono $(\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5)$ e $(-\sqrt{5}/5, -\sqrt{5}/5)$.

PROBLEMA 3. Calcoliamo il gradiente di $f(x, y)$ in un punto generico del piano,

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 - 2, 4y^3 + 2).$$

I punti stazionari sono quelli che annullano il gradiente, pertanto ve ne è uno solo, $(1/\sqrt[3]{2}, -1/\sqrt[3]{2})$. Calcoliamo la matrice hessiana,

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

che valutata nel punto stazionario diventa

$$H(1/\sqrt[3]{2}, -1/\sqrt[3]{2}) = \begin{pmatrix} 12/\sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 12/\sqrt[3]{4} \end{pmatrix}.$$

Per il test della matrice hessiana il punto $(1/\sqrt[3]{2}, -1/\sqrt[3]{2})$ è un punto di minimo locale.

PROBLEMA 4. Per risolvere il problema di Cauchy dato occorre prima di tutto risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + x.$$

Consideriamo prima l'equazione omogenea associata, cioè

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

A questa corrisponde l'equazione caratteristica

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

che ha come soluzioni $k = 1$ e $k = 2$. Pertanto la soluzione omogenea dell'equazione differenziale è

$$y_{om} = Ae^x + Be^{2x}.$$

Ora vogliamo trovare la soluzione particolare y_p mediante il metodo di somiglianza. Andiamo a cercare una soluzione del tipo $y_p = Ce^{-x} + Dx + E$. Sostituendola nell'equazione di partenza otteniamo $C = 1/6, D = 1/2, E = 3/4$. Quindi la soluzione particolare è. Di conseguenza la soluzione generale dell'equazione iniziale è

$$y = y_{om} + y_p = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}.$$

Per concludere l'esercizio occorre imporre le condizioni del problema di Cauchy: $y(0) = -1$ e $y'(0) = 0$. A queste corrispondono le seguenti equazioni

$$\begin{cases} A + B + 1/6 + 3/4 = -1 \\ A + 2B - 1/6 + 1/2 = 0. \end{cases}$$

Da cui si ottiene che $A = -\frac{5}{4}$ e $B = \frac{13}{12}$. Per concludere quindi, la soluzione a problema di Cauchy dato é

$$y(x) = -\frac{5}{4}e^x + \frac{13}{12}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}.$$