

Analisi Matematica 2

IX esercitazione

1. CAMBIO DI VARIABILI

1. PROBLEMA Calcolare i seguenti integrali doppi;

- (1) $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy$ dove $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$. [Risposta: $\frac{3}{4}$]
- (2) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ dove $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 0\}$. [Risposta: $\frac{256}{9}$]
- (3) $\iint_D y dx dy$ dove $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36, y \geq 0\}$. [Risposta: 8]
- (4) $\iint_D \arctan(y/x) dx dy$ dove $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq |x|\}$. [Risposta: 0]
- (5) $\iint_D (\ln(y/x))^2 dx dy$ dove D è l'insieme del primo quadrante delimitato dalle rette $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$ e dalle iperboli $xy = 1$, $xy = 2$. [Risposta: $\frac{(\ln 2)^3}{3}$]

2. APPLICAZIONI FISICHE

2. PROBLEMA Calcolare la massa e il baricentro di una lamina circolare avente densità di massa pari al quadrato della distanza dal centro della lamina.

3. PROBLEMA Calcolare il momento di inerzia di una sezione di una trave rettangolare omogenea rispetto all'asse perpendicolare alla sezione e passante per il baricentro.

3. INTEGRAZIONE PER FILI E PER STRATI

4. PROBLEMA Calcolare

$$\iiint_D (x + y - 3z) dx dy dz$$

dove $D = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

5. PROBLEMA Calcolare

$$\iiint_D x dx dy dz$$

2

dove $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

6. PROBLEMA Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando il grafico di una funzione continua positiva $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intorno all'asse x .

7. PROBLEMA Calcolare i seguenti integrali tripli

- (1) $\iiint_D y dx dy dz$ dove D è il dominio delimitato dal paraboloide di equazione $y = 4x^2 + 4z^2$ e dal piano $y = 4$. [Risposta: $\frac{16}{3}\pi$].
- (2) $\iiint_D z dx dy dz$ con D il dominio nel primo ottante delimitato dal piano $y = 3x$ e dal cilindro $y^2 + z^2 = 9$. [Risposta: $\frac{27}{8}$].

8. PROBLEMA Dato $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$, disegnare D e calcolare

$$\iiint_D z e^z dx dy dz.$$

[Risposta: 4π].

9. PROBLEMA Determinare il volume del solido D definito da

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - z \leq 0, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

[Risposta: $\frac{\pi}{8}$].

10. PROBLEMA Dato $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 3\}$, calcolare $\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$ per fili e per strati. [Risposta: $\frac{4}{3}\pi$].

11. PROBLEMA Calcolare i seguenti integrali tripli:

- (1) $\iiint_D xyz dx dy dz$, $D = [0, 1] \times [-1, 2] \times [0, 2]$ [Risposta: $\frac{3}{2}$].
- (2) $\iiint_D y dx dy dz$, D la regione nel primo ottante delimitata dai piani $x + y = 1$ e $y + z = 1$. [Risposta: $\frac{1}{12}$].
- (3) $\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$, D la regione contenuta all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, al di sotto del piano $z = 3$ e al di sopra del paraboloide di equazione $x^2 + y^2 + z = 1$. [Risposta: $\frac{4}{3}\pi$].