Analisi Matematica 2
III esercitazione

1. Stime di errori con resto di Lagrange

1. PROBLEMA Calcolare l'approssimazione lineare $L(x, y)$ di $F(x, y) = \cos(xy)$ nel punto $(0, 0)$.

Stimare per quali valori di r, in un intorno $N_r(0, 0)$, si ha che $|F(x, y) - L(x, y)| \le 0,01$.

2. Classificazione con test Hessiana

2. PROBLEMA Per ciascuna delle seguenti funzioni, calcolare e classificare i punti stazionari.

(1) $f(x, y) = x^3 + y^2 - x$,
(2) $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$,
(3) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^4 + y^2$,
(4) $f(x, y) = e^x(x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2$,
(5) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
(6) $f(x, y) = 3xy^2 + 2x^3 + xy$,
(7) $f(x, y) = xe^y - ye^x$.

3. Classificazione con test hessiana non decisivo

3. PROBLEMA Per ciascuna delle seguenti funzioni, calcolare e classificare i punti stazionari.

(1) $f(x, y) = (x - y)^2 - x^2y^2$,
(2) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$,
(3) $f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$,
(4) $f(x, y) = x^2e^{-x^2-y^2}$,
(5) $f(x; y) = 4(x + 1)y^3 - 3y^4 + 27x^4 + 1$,
(6) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3x + 1$,
(7) $f(x, y) = (xy - 1)^2$.

(1.) $F(x,y) = \cos(xy)$

a. Calcolare l'approssimazione lineare $L(x,y)$ in $(0,0)$

b. Stimare per quali valori di r, in un intorno $N_r(0,0)$, si ha $|F(x,y) - L(x,y)| \leq 0{,}01$

$$|F(x,y) - L(x,y)| = \frac{1}{2}\left|(x-x_0, y-y_0)\, H(P_z) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \| H(P_z) \| \, \| (x-x_0, y-y_0) \|^2$$

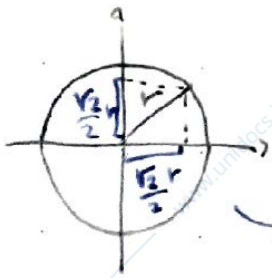
$\rightarrow$

$$\nabla F(x,y) = (-y\sin(xy), -x\sin(xy))$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2\cos(xy) & -\sin(xy) - xy\cos(xy) \\ -\sin(xy) - xy\cos(xy) & -x^2\cos(xy) \end{pmatrix}$$

$$\|H(x,y)\| = \sqrt{y^4\cos^2(xy) + 2\sin^2(xy) + 2x^2y^2\cos^2(xy) + 4xy\sin(xy)\cos(xy) + x^4\cos^2(xy)}$$

$$\sqrt{\underbrace{(x^2+y^2)^2}_{\leq r^4} \underbrace{\cos^2(xy)}_{\leq 1} + \underbrace{2\sin^2(xy)}_{\leq 2r^2} + \underbrace{2xy\sin(xy)\cos(xy)}_{\sin(2xy) \leq 1}}$$



$\rightarrow x_{max} y_{max} = \frac{r^2}{2}$

$$\leq r^2 \frac{\sqrt{(r^2+1)^2+1}}{2} \leq \frac{1}{2}((r^2+1)+1)\, r^2$$

$\hookrightarrow |F-L| \leq \frac{1}{2}(r^2+2)r^2 \leq \frac{1}{100}$

$r^4+2r^2-\frac{1}{50} \leq 0 \qquad r^2 = t$

$t^2+2t-\frac{1}{50} \leq 0 \qquad t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{102}}{25}$

$\underbrace{\frac{-2-\sqrt{\frac{102}{25}}}{2}}_{\text{sempre vera}} \leq r^2 \leq \frac{-2+\sqrt{\frac{102}{25}}}{2}$

$r \leq \frac{\sqrt{\sqrt{102}-10}}{5}$

$L(x,y) = F(0,0) + \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(0,0)} x + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(0,0)} y$

$L(x,y) = 1$

2. (1) $f(x,y) = x^3+y^2-x$

Trovare massimo e minimo

$\nabla f(x,y) = (3x^2-1, 2y) = 0$

$\begin{cases} 3x^2-1=0 \\ 2y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y=0 \end{cases}$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12x$$

$H\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) = 4\sqrt{3} > 0 \longrightarrow 2\sqrt{3} > 0 \longrightarrow$ PUNTO DI MINIMO

$H\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) = -4\sqrt{3} < 0 \longrightarrow$ PUNTO DI SELLA

(2) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ 6y - 6x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ x = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 72x - 36$$

$H(0,0) = -36 < 0 \longrightarrow$ PUNTO DI SELLA

$H(1,1) = 36 > 0 \longrightarrow 12 > 0 \rightarrow$ PUNTO DI MINIMO

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 14 . 10 . 19

(3) $f(x,y) = x^2 - 2x + y^4 + y^2$

$\nabla f(x,y) = (2x-2,\ 4y^3 + 2y)$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y\underbrace{(y^2+1)}_{>0} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2+2 \end{pmatrix} = 24y^2 + 4$$

$H(1,0) = 4 > 0 \rightarrow 2 > 0 \rightarrow$ PUNTO DI MINIMO

(4) $f(x,y) = e^x(x-1)(y-1) + (y-1)^2$

$\nabla F(x,y) = \left((y-1)(e^x + (x-1)e^x),\ e^x(x-1) + 2(y-1)\right)$

$$\begin{cases} (x-1)\,x\,e^x = 0 \\ e^x(x-1) + 2(y-1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} (y-1)e^x(x+1) & xe^x \\ xe^x & 2 \end{pmatrix}$$

$H(1,1) = -e^2 < 0 \rightarrow$ PUNTO DI SELLA

$H(0,\frac{3}{2}) = 1 > 0 \longrightarrow \frac{1}{2} > 0 \rightarrow$ PUNTO DI MINIMO

5

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 24. 10. 19

3

(1) $f(x,y) = (x-y)^2 - x^2y^2$

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2xy^2 = 0 \\ -2x + 2y - 2yx^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(1-y^2) = y \\ y(1-x^2) = x \end{cases}$$

Sicuramente $y \neq \pm 1$ e $x \neq \pm 1$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y}{1-y^2} \\ y = \dfrac{x}{1-x^2} \end{cases} \qquad x = \dfrac{\dfrac{x}{1-x^2}}{1 - \dfrac{x^2}{(1-x^2)^2}}$$

$$x = \frac{x}{\cancel{(1-x^2)}\left(\dfrac{1+x^4-2x^2-x^2}{(1-x^2)^{\cancel{2}}}\right)}$$

$$\cancel{x}\,/\,1 - 3x^2 + x^4) = \cancel{x}(1-x^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2\cancel{x^2} + x^{\cancel{4}\,2} = 0 \\ y = \dfrac{x}{1-x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \mp\sqrt{2} \end{cases}$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y^2 & -2-4xy \\ -2-4xy & 2-2x^2 \end{pmatrix} = (2-2y^2)(2-2x^2) - (2+4xy)^2$$

$H(0,0) = 0$

$H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -32 < 0 \rightarrow$ PUNTO DI SELLA

$H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -32 < 0 \rightarrow$ PUNTO DI SELLA

Visto che $\det H(0,0)=0$

Analizziamo meglio la f in $(0,0)$:

$f(0,0)=0$

zeri della funzione

$f(x,y)=0 \qquad (x-y)^2-x^2y^2=0$

$[(x-y)-(xy)]\,[(x-y)+xy]=0$

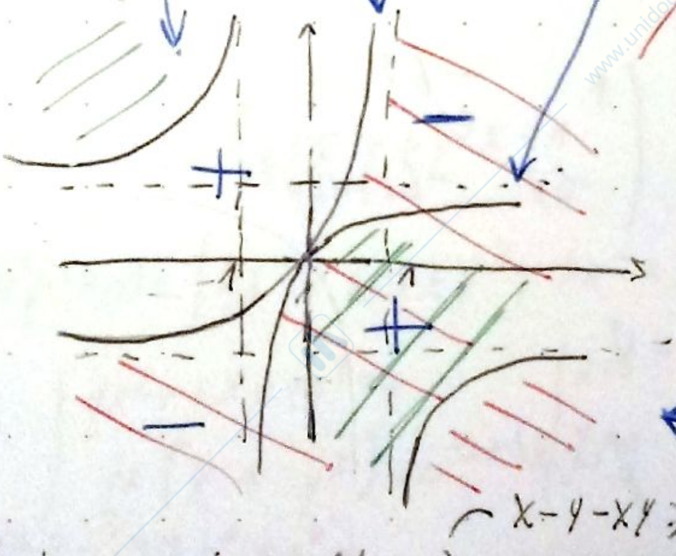
$x-y-xy=0 \qquad x=y(1+x) \rightarrow x\neq\pm1$

$x-y+xy=0 \qquad x=y(1-x)$

$y=\dfrac{x}{1+x}$

$y=\dfrac{x}{1-x}$

Se non c'è niente o se ||| e ||| si intersecano significa che ho valori positivi



PUNTO DI SELLA

Consideriamo poi $f(x,y)\geq 0$

$x-y-xy\geq 0$ se $\begin{cases} x\geq -1 \\ y\leq \dfrac{x}{x+1}\end{cases}$ → ///

se $\begin{cases} x\leq -1 \\ y\geq \dfrac{x}{x+1}\end{cases}$ → ///

$x-y+xy\geq 0$ se $\begin{cases} x\leq 1 \\ y\leq \dfrac{x}{1-x}\end{cases}$ → \\\

se $\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq \dfrac{x}{1-x}\end{cases}$ → \\\

7 No. Es. ANALISI 2

Date 24 . 11 . 17

Oppure possiamo fare

$f(t,t) = -t^4 < 0$] PUNTO DI SELLA
$f(-t,t) = 4t^2 + 4t^4 > 0$

ma questo metodo non funziona sempre

(3) (2) $f(x,y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$

$\nabla f(x,y) = (4x - 3y^2, -6xy + 4y^3)$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}y^2 \\ y(4y^2 - 6x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -6y \\ -6y & -6x+12y^2 \end{pmatrix}$$

$\det H(0,0) = 0$

$f(0,0) = 0 \qquad f(x,y) = 0$

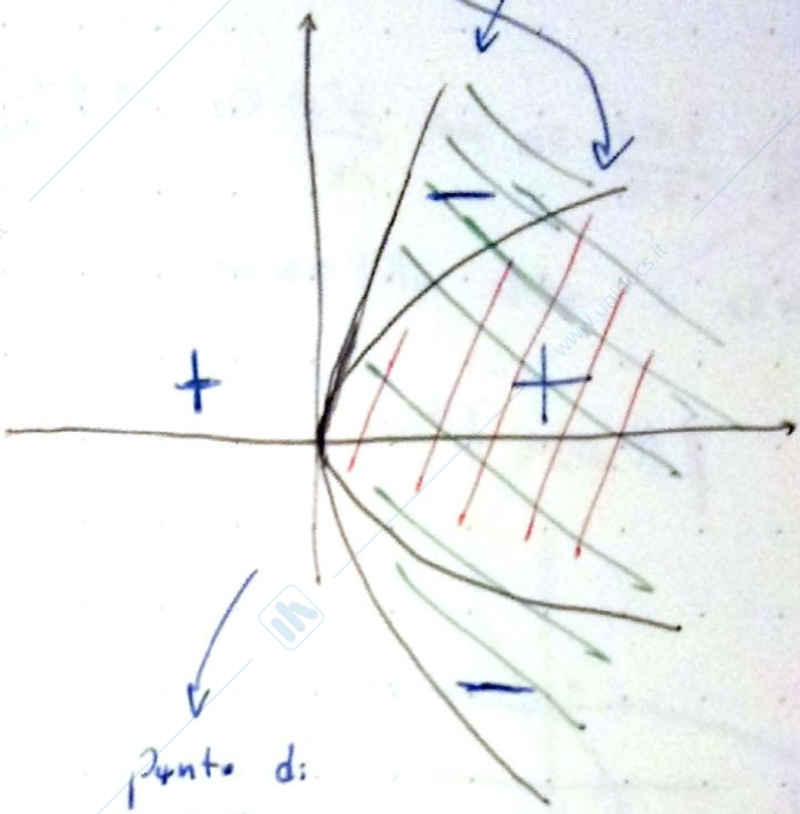
$2x^2 - 3xy^2 + y^4 = 0 \qquad x^2 + x^2 - xy^2 - 2xy^2 + y^4 = 0$

$x^2 - xy^2 + (x-y^2)^2 = 0 \qquad x(x-y^2) + (x-y^2)^2 = 0$

$(x-y^2)(x + x - y^2) = 0$

$\hookrightarrow f(x,y) \geq 0$

$y^2 \leq x \qquad \frac{y^2}{2} \leq x$



Punto di sella

(6) $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^3x + 1$

$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 6xy + y^3, \; 3x^2 + 3y^2x)$

$$\begin{cases} 3x^2 + 6xy + y^3 = 0 \\ 3x(x + y^2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3y^2 \\ 3y^4 - 5y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{25}{9} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+6y & 6x+3y^2 \\ 6x+3y^2 & 6xy \end{pmatrix}$$

$\det H(0,0) = 0$

$\det H\left(-\frac{25}{9}, \frac{5}{3}\right) = \frac{3125}{27} > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \rightarrow$ punto di massimo

In questo caso è utile utilizzare il metodo delle rette:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad f(t,0) = t^3 + 1$$

flesso in $(0,1)$

$\Downarrow$

$(0,0)$ punto di sella

perché

$f(t,0)$ in $(0,0) = (0,1)$