

Lezione 8/10

Derivate di funzioni composte e
piano tangente al grafico

Derivate di funzioni composte

- Se $f: I \rightarrow J$ e $g: J \rightarrow K$ sono funzioni di una variabile allora sappiamo che

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

- Ci sono regole analoghe per calcolare le derivate parziali di funzioni composte. Siccome ci sono vari modi per comporre le funzioni, dobbiamo distinguere vari casi.

I caso: $G(x,y)=f(F(x,y))$

- Sia $F: D \rightarrow I$ una funzione di due variabili e sia (x_0, y_0) un punto interno di D . Sia

$f: I \rightarrow J$ una funzione di una variabile.

Se F è **derivabile** in (x_0, y_0) e f è derivabile in $t_0 = F(x_0, y_0)$ allora $G = f \circ F$ è derivabile in (x_0, y_0) e

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(t_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) = f'(t_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Il Caso: $g(t)=F(x(t),y(t))$

- Sia $F : D \rightarrow J$ una funzione di due variabili e sia (x_0, y_0) un punto interno di D . Sia

$$r : I \rightarrow D, \quad r(t) = (x(t), y(t))$$

una curva tale che $r(t_0) = (x_0, y_0)$.

Supponiamo inoltre che r sia differenziabile in t_0 . Se F è **differenziabile** in (x_0, y_0) allora la funzione $g = F \circ r$ è derivabile in t_0 e

$$g'(t_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0)$$

Esempio

- Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x, y) = x^2 + y^2$
- Sia $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva definita ponendo $r(t) = (e^t, e^{-t})$
- Allora la funzione $g = F \circ r$ è $g(t) = e^{2t} + e^{-2t}$
- Si verifica facilmente che, calcolando la derivata di $g(t)$ usando questa espressione e usando la formula per la derivata di una funzione composta, si ottiene lo stesso risultato.

Controesempio

- Diamo ora un esempio in cui la regola di differenziazione di funzione composta non vale perché F non è differenziabile.

Consideriamo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e sia $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva $r(t) = (t, t)$

Risulta che $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$ ma $(F \circ r)'(0) = \frac{1}{2}$

III Caso:

$G(u,v)=F(x(u,v),y(u,v))$

- Sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di due variabili differenziabile in (x_0, y_0) .
- Sia $M : U \rightarrow D$ una funzione di due variabili a valori vettoriali, quindi $M(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$
- Supponiamo che $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) = (x_0, y_0)$ e che sia x che y siano differenziabili in (u_0, v_0) . Allora, se $G = F \circ M$

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)$$

III Caso:

$$G(u,v)=F(x(u,v),y(u,v))$$

- In modo meno preciso ma più espressivo in questo caso la regola di derivazione di funzione composta si scrive

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Esercizio

- Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $F(x, y) = e^{x^2 + y^2}$. Sia $D = \{(\rho, \theta) \mid \rho > 0\}$ e sia $M : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$M(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

- Calcolare $\frac{\partial(F \circ M)}{\partial \rho}$ e $\frac{\partial(F \circ M)}{\partial \theta}$

Equazione del piano tangente

- Se F è differenziabile è possibile calcolare l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico della funzione.

Vettori tangenti al grafico

- Sia (x_0, y_0) un punto del dominio D di una funzione di due variabili F .
- Un vettore tangente al grafico di F nel punto (x_0, y_0) è il vettore tangente $r'(t_0)$ di una curva $r(t)$ derivabile avente sostegno sul grafico di F e tale che $r(t_0) = (x_0, y_0, F(x_0, y_0))$.

Piano tangente al grafico

- Il piano tangente al grafico di F nel punto (x_0, y_0) è il piano passante per $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ e parallelo a tutti i vettori tangenti al grafico di F in (x_0, y_0) .

Calcolo dell'equazione del piano tangente al grafico

- Sia $v = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ un vettore tangente al grafico di F nel punto (x_0, y_0) . Sia $r(t)$ una curva sul grafico di F tale che $r(t_0) = (x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ e $r'(t_0) = v$. Siccome $r(t)$ è sul grafico di F abbiamo che

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + F(x(t), y(t))\vec{k}$$

- Allora, se F è differenziabile,

$$r'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) \right) \vec{k}$$

Calcolo dell'equazione del piano tangente al grafico

- In particolare,

$$a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = r'(t_0) = a\vec{i} + b\vec{j} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)b \right) \vec{k}$$

da cui ricaviamo che

$$c = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)b$$

Quindi i vettori tangenti al grafico soddisfano l'equazione

$$z = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)y$$

Calcolo dell'equazione del piano tangente al grafico

- Il piano parallelo al piano di equazione

$$z = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)y$$

e passante per $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z - F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

e quindi il piano tangente al grafico di F in (x_0, y_0) è il piano di equazione

$$z = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Approssimazione lineare e piano tangente al grafico

- Come abbiamo visto il piano tangente ha equazione

$$z=L(x,y)$$

dove $L(x,y)$ è l'approssimazione lineare di F in (x_0,y_0) .

Quindi l'approssimazione lineare di una funzione differenziabile è la funzione il cui grafico è il piano tangente.

Esercizio

- Sia $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 6\}$ e
sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita
ponendo

$$F(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$$

Calcolare l'equazione del piano
tangente al grafico in $(1, 1)$.

Il gradiente

- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di due variabili e (x_0, y_0) è un punto interno di D in cui la funzione è derivabile, allora il **gradiente** di F nel punto (x_0, y_0) è il vettore

$$\nabla F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

o, in forma vettoriale

$$\nabla F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \vec{j}$$

Esempio

- Se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita ponendo

$$F(x, y) = e^{x^2 + y^2}$$

allora il suo gradiente è

$$\nabla F = (2xe^{x^2 + y^2})\vec{i} + (2ye^{x^2 + y^2})\vec{j}$$

e

$$\nabla F(0, 0) = \vec{0}$$

Derivate direzionali

- Sia $v=(l,m)$ un versore, cioè un vettore di lunghezza 1. Sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Se (x_0,y_0) è un punto interno di D , allora la derivata direzionale di F nel punto (x_0,y_0) e nella direzione v è

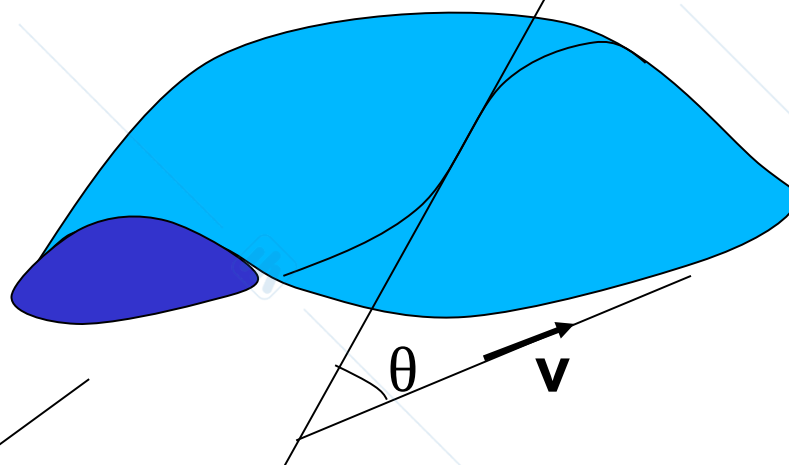
$$D_v F(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + hl, y_0 + hm) - F(x_0, y_0)}{h}$$

- **ovvero** $D_v F(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} F(x_0 + tl, y_0 + tm) \Big|_{t=0}$

08/10/19

Interpretazione geometrica

$$D_{\mathbf{v}} F = \tan(\theta)$$



- La derivata direzionale è la rapidità di variazione della funzione nella direzione e verso individuati da \mathbf{v}

Le derivate parziali sono derivate direzionali

- Se si sceglie $v = \vec{i}$ allora

$$D_{\vec{i}} F(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Se si sceglie $v = \vec{j}$ allora

$$D_{\vec{j}} F(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y_0 + h) - F(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Formula del gradiente

- Se F è differenziabile allora è possibile calcolare tutte le derivate direzionali conoscendo solo le derivate parziali, vale infatti la seguente formula:

$$D_{\mathbf{v}} F(x_0, y_0) = \nabla F(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v}$$

Questa formula è detta **Formula del gradiente**

Dimostrazione della formula del gradiente

- Sai $v=(l,m)$ e fissiamo t_0 in modo tale che i punti (x_0+lt,y_0+mt) siano in D se $|t| < t_0$. Consideriamo la curva $r:(-t_0,t_0) \rightarrow D$ definita ponendo $r(t)=(x_0+lt,y_0+mt)$

Allora

$$D_v F(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} F(x_0 + tl, y_0 + tm) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} F(r(t)) \Big|_{t=0}$$

Dimostrazione della formula del gradiente

Per la regola di derivazione di funzioni composte (Il Caso)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} F(r(t))|_{t=0} &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)l + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)m \\ &= \nabla F(x_0, y_0) \cdot \nu\end{aligned}$$

Esempio

- Supponiamo che in una carta topografica l'altezza sul livello del mare nel punto (x,y) sia data dalla funzione

$$h(x, y) = 2x^2 + xy + y^2$$

- Se ci si trova nel punto $(1,1)$ e ci si muove in direzione nord-est si sale o si scende?