Lezione 15/11

Funzioni a valori vettoriali

Equazione logistica

- L'equazione logistica è l'equazione

$$y' = ay(1-by), \qquad a>0, b>0$$

- E' un'equazione a variabili separabili: ha due soluzioni costanti $y=0$ e $y=\frac{1}{b}$.
- Le altre soluzioni sono

$$y = \frac{c_1 e^{ax}}{1 + b c_1 e^{ax}}$$

con c_1 costante arbitraria

Equazione logistica

- L'equazione logistica è l'equazione

$$y' = ay(1 - by), \qquad a > 0, b > 0$$

- E' un'equazione a variabili separabili: ha due soluzioni costanti $y = 0$ e $y = \frac{1}{b}$.
- Le altre soluzioni sono

$$y = \frac{c_1 e^{ax}}{1 + b c_1 e^{ax}}$$

con c_1 costante arbitraria

Osservazioni sulle equazioni a variabili separabili

- Contrariamente a quanto succede con le equazioni lineari la soluzione di un problema a variabili separabili è definita in un intervallo più piccolo di quello in cui è definito il problema.
- Se non si impone la condizione che b(y) è una funzione C^1 la soluzione del problema di Cauchy può non essere unica.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esempio

- Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Teoria generale delle equazioni differenziali

- Studiamo ora un'equazione differenziale generica y'=F(x,y) dove F è una funzione di due variabili e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Problema

- Ci chiediamo quali sono le condizioni sulla funzione F affinché il problema di Cauchy abbia soluzioni e se la soluzione è unica.

Funzioni Lipschitziane

- Sia D un aperto in $\mathbb{R}^2$ e sia $F: D \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili continua.
- Diremo che F è Lipschitziana in D se per ogni punto P di D esiste un intorno U e una costante L_U per cui

$$|F(x,y_1)-F(x,y_2)| \leq L_U |y_1-y_2|$$

per ogni x, y_1, y_2 tali che $(x,y_1),(x,y_2) \in U$

Condizione sufficiente

- Se F è una funzione continua tale che $\frac{\partial F}{\partial y}$ è anch'essa continua allora F è Lipschitziana.

Infatti, dato un punto P di D, sia U un disco chiuso contenuto in D e avente centro P. Per il teorema di Lagrange

$$F(x,y_1)-F(x,y_2)=\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(y_1-y_2)$$

quindi, se L è il massimo di $|\frac{\partial F}{\partial y}|$ in U , allora

$$|F(x,y_1)-F(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$$

Teorema di Cauchy

- Se F è Lipschitziana su D allora, dato $(x_0, y_0) \in D$ esiste un intorno I di x_0 e una funzione y(x) definita su I che è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Inoltre questa soluzione è unica

Prolungamento

- Se F e $\frac{\partial F}{\partial y}$ sono continue in D e $(x_0, y_0) \in D$ allora esiste un intervallo (x_{min}, x_{max}) in cui la soluzione del problema di Cauchy è definita e al di fuori di questo intervallo la soluzione non esiste oppure è al di fuori di D.
- Per $x \to x_{min}^{+}, x \to x_{max}^{-}$ la soluzione si avvicina indefinitamente al bordo di D.

Esempio

- Si calcoli la soluzione dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Esistenza e unicità globale

- Teorema:Se F e $\frac{\partial F}{\partial y}$ sono continue in una striscia $S=[a,b]\times\mathbb{R}$ e esistono due numeri positivi h,k tali che

$$|F(x,y)|\leq h+k|y|$$

allora, per ogni $(x_0,y_0)\in S$ esiste y(x) definita su [a,b] che è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=F(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

Inoltre questa soluzione è unica.

Esempio

- La condizione del teorema è soddisfatta ad esempio dalle equazioni lineari y'+p(x)y=q(x).
- In questo caso F(x,y)=-p(x)y+q(x).
- Se p(x) e q(x) sono funzioni continue definite su un intervallo [a,b] allora esostono h,k tali che

$$|p(x)| \le k\,, \quad |q(x)| \le h$$

e quindi

$$|F(x,y)| \le |q(x)| + |p(x)||y| \le h + k|y|$$

Funzioni a valori vettoriali

- Finora abbiamo considerato funzioni a valori scalari, cioè funzioni $F : D \to \mathbb{R}$ dove D è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.
- Le funzioni a valori vettoriali sono funzioni

$$F : D \to \mathbb{R}^m$$

con m>1.

Esempi: trasformazioni di coordinate

- Esempi di funzioni a valori vettoriali sono le trasformazioni di coordinate. La trasformazione di coordinate nel piano più importante è data dalle coordinate polari: sia $D=[0,+\infty)\times[0,2\pi)$ possiamo pensare la trasformazione da coordinate polari a coordinate cartesiane come la funzione $F:D\rightarrow\mathbb{R}^2$

$$F(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$

Trasformazioni di coordinate nello spazio

- Coordinate cilindiriche: sia $D=[0,+\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R}$. Le coordinate cilindriche sono date dalla trasformazione $F:D\to\mathbb{R}^3$

$$F(\rho,\theta,t)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,t)$$

- Coordinate sferiche: sia $D=[0,+\infty)\times[0,2\pi)\times[-\pi/2,\pi/2]$ Le coordinate sferiche sono date dalla trasformazione

$$F(\rho,\theta,\phi)=(\rho\cos\theta\cos\phi,\rho\sin\theta\cos\phi,\rho\sin\phi)$$

Matrice Jacobiana

- Se $G : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad G(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

è una trasformazione di coordinate nel piano la matrice

$$DG(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

è detta matrice Jacobiana della trasformazione nel punto (u_0, v_0) .

Matrice Jacobiana

- Se $G : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$G(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

è una trasformazione di coordinate nello spazio la matrice

$$DG(u_0, v_0, w_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial x}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial y}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0, w_0) & \frac{\partial z}{\partial w}(u_0, v_0, w_0) \end{pmatrix}$$

è detta matrice Jacobiana della trasformazione nel punto (u_0, v_0, w_0).

Trasformazioni regolari

- Una trasformazione si dice regolare nel punto P_0 se

$$det\, DG(P_0) \neq 0$$

- Le trasformazioni date dalle coordinate polari, cilindriche, sferiche sono regolari nei punti interni del loro dominio.