

# Lezione 19/11

## Campi vettoriali

# Campi scalari e campi vettoriali

- Un campo scalare è una funzione  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$
- Un campo vettoriale nel piano è una funzione  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  dove  $D$  è un aperto nel piano.
- Un campo vettoriale nello spazio è una funzione  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dove  $D$  è un aperto nello spazio.

# Esempio fisico

- Possiamo rappresentare il moto di un fluido assegnando a ogni particella del fluido la sua velocità in un dato istante. Abbiamo quindi in ogni istante un campo vettoriale nello spazio detto campo di velocità. Il campo è detto stazionario se non dipende dal tempo.

# Esempio fisico

- Data una carica distribuita in una certa regione dello spazio possiamo associare a ogni punto nello spazio un vettore che rappresenta la forza per unità di carica esercitata su una particella carica che si trova in quel punto. Il campo vettoriale che si ottiene è detto campo elettrostatico.

# Campi di forza

- Un altro esempio di campo è dato dal campo gravitazionale di una massa distribuita in una regione dello spazio: a ogni punto si associa la forza per unità di massa esercitata su una particella materiale posta nel punto dato.
- Il campo elettrostatico e il campo gravitazionale sono esempi di campi di forza.

# Esempi analitici

- La funzione  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita ponendo

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

è un campo vettoriale nel piano.

- La funzione  $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita ponendo

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|^3} (x, y, z)$$

è un campo vettoriale nello spazio.

# Rappresentazione grafica

- I campi vettoriali si possono rappresentare graficamente disegnando nel punto  $\mathbf{x}$  il vettore  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .

# Esempi

- Disegnare la rappresentazione grafica dei seguenti campi:

- $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = (y, -x)$

- $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$

# Linee di campo

- Per rappresentare un campo vettoriale si possono usare le linee di campo: una linea di campo di un campo vettoriale  $F$  è una curva  $\vec{r}$  tale che per ogni  $t$  si ha che

$$\vec{r}'(t) = F$$

- Le linee di campo sono dette linee di flusso se il campo è un campo di velocità e linee di forza se il campo è un campo di forza.

# Componenti di un campo

- Usando la notazione vettoriale un campo vettoriale piano si può scrivere anche come

$$F(x, y) = F_1(x, y) \vec{i} + F_2(x, y) \vec{j}$$

mentre un campo nello spazio è

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z) \vec{i} + F_2(x, y, z) \vec{j} + F_3(x, y, z) \vec{k}$$

Le funzioni  $F_i$  sono dette componenti del campo.

# Campi lisci

- Un campo vettoriale si dice liscio le sue componenti sono di classe  $C^\infty$ .
- Nel seguito considereremo solo campi lisci.
- L'insieme dei campi lisci nel piano definiti su  $D$  si indica con  $C^\infty(D, \mathbb{R}^2)$
- L'insieme dei campi lisci nello spazio definiti su  $D$  si indica con  $C^\infty(D, \mathbb{R}^3)$
- L'insieme dei campi scalari lisci definiti su  $D$  si indica con  $C^\infty(D)$

# Operatori differenziali

- La funzione  $\Delta : C^\infty(D) \rightarrow C^\infty(D)$  definita ponendo

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

è un esempio di operatore differenziale.

# Il gradiente come operatore differenziale

- Un altro esempio di operatore differenziale è il gradiente: se  $D$  è un dominio in  $\mathbb{R}^2$  possiamo definire  $\nabla : C^\infty(D) \rightarrow C^\infty(D, \mathbb{R}^2)$  ponendo

$$\nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

- Se  $D$  è un dominio in  $\mathbb{R}^3$  possiamo definire  $\nabla : C^\infty(D) \rightarrow C^\infty(D, \mathbb{R}^3)$  ponendo

$$\nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

# Rotore e divergenza

- Introduciamo altri due importanti operatori differenziali che agiscono su campi vettoriali nello spazio: il rotore e la divergenza.
- Il rotore è definito come  $rot: C^\infty(D, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(D; \mathbb{R}^3)$

$$rot F = \nabla \times F$$

- La divergenza è definita come  $div: C^\infty(D, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(D)$

$$div F = \nabla \cdot F$$

# Identità differenziali

- Valgono le seguenti identità:
- $\nabla \times (\nabla F) = \vec{0}$
- $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$
- $\nabla \cdot (\nabla F) = \Delta F$

# Rotore di un campo piano

- Un campo piano può essere considerato come un campo nello spazio indipendente da  $z$  e la cui terza componente è nulla:

$$F(x, y, z) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j} + 0\vec{k}$$

- In questo caso

$$\text{rot } F = \left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \vec{k}$$

# Campi conservativi

- Un campo vettoriale  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n=2,3$ ) si dice conservativo se esiste una funzione

$$\Phi : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } F = \nabla \Phi .$$

- La funzione  $\Phi$  è detta un potenziale del campo.
- Si noti che il potenziale non è unico: se  $\Phi$  è un potenziale allora anche  $\Phi + C$  con  $C \in \mathbb{R}$  lo è.

# Esempio

- Il campo  $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito ponendo

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|^3} (x, y, z)$$

è conservativo, infatti la funzione  $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$  definita ponendo

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{\|(x, y, z)\|}$$

è un potenziale per  $F$ .

# Condizione necessaria per campi nello spazio

- Teorema: Se  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è conservativo, allora

$$\operatorname{rot} F = \vec{0}$$

- Dimostrazione: Se  $F$  è conservativo allora  $F = \nabla \Phi$  e quindi

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times (\nabla \Phi) = \vec{0}$$

# Condizione necessaria nel piano

- Teorema: Se un campo vettoriale nel piano

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(x, y) = F_1(x, y) \vec{i} + F_2(x, y) \vec{j}$$

è conservativo allora in ogni punto  $(x_0, y_0)$  di  $D$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Dimostrazione: Siccome  $F$  è conservativo  $rot F = \vec{0}$  e quindi

$$\vec{0} = \left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \vec{k}$$

# Esempio

- Verificare se il campo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definito ponendo

$$F(x, y) = (2x, e^{xy})$$

è conservativo.

# Calcolo del potenziale

- Ci poniamo ora il problema di come fare a verificare se un campo che soddisfa la condizione necessaria è effettivamente conservativo.
- Il modo più semplice per fare questa verifica consiste nel calcolare esplicitamente un potenziale.

# Esempio

- Verificare se il campo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definito ponendo

$$F(x, y) = (2x + 2xy^2, 2y + 2yx^2)$$

è conservativo.

# Esercizio

- Verificare se il campo  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definito ponendo

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

è conservativo.

# Esercizio

- Verificare se il campo  $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito ponendo

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|^3} (x, y, z)$$

è conservativo.

# (Contro)esempio

- Verificare se il campo  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definito ponendo

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

è conservativo.