

Lezione 29/10

EDO al secondo ordine lineari

EDO del II ordine lineari

- Una EDO del II ordine lineare è una equazione del tipo

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

- L'equazione si dice in forma normale se $a_2(x)=1$
- Si dice omogenea se $f(x)=0$, altrimenti si dice completa.
- La funzione $f(x)$ è detta forzante.

Problema di Cauchy

- Teorema: Siano $a(x)$, $b(x)$ e $f(x)$ funzioni continue definite sull'intervallo I e sia

$$x_0 \in I$$

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione $y \in C^2(I)$.

Operatore associato a una EDO lineare

- Data l'equazione lineare

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

la funzione $L: C^2(I) \rightarrow C(I)$ definita ponendo

$$L(y) = y'' + a(x)y' + b(x)y$$

è detta operatore associato all'equazione.

Osservazione

- $C^2(I)$ e $C(I)$ sono spazi vettoriali e L è una trasformazione lineare.

Conseguenza dell'osservazione

- L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

è $\text{Ker}L$ e quindi è un sottospazio di $C^2(I)$,
cioè se y_1, y_2 sono soluzioni
dell'equazione allora lo è anche ogni
combinazione lineare $Ay_1 + By_2$.

Struttura dell'integrale generale

- Sia y_p una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

- Allora l'integrale generale dell'equazione è ottenuto sommando a y_p l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

Dimostrazione

- L'equazione si può scrivere come $L(y)=f(x)$ dove L è l'operatore associato all'equazione.

Se z è una soluzione dell'equazione omogenea allora

$$L(y_p + z) = L(y_p) + L(z) = f(x) + 0 = f(x)$$

Viceversa se y è soluzione dell'equazione completa allora $y = y_p - y_p + y$ e

$$L(-y_p + y) = -L(y_p) + L(y) = -f(x) + f(x) = 0$$

Lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea

- Teorema: Se $a(x)$ e $b(x)$ sono continue in I allora lo spazio delle soluzioni di

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

ha dimensione due.

Quindi se y_1 , y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti allora l'integrale generale dell'equazione è $y = Ay_1 + By_2$ al variare di A, B in \mathbb{R}

Dimostrazione

Due funzioni y_1, y_2 si dicono linearmente indipendenti se la combinazione lineare $Ay_1 + By_2$ (con $A, B \in \mathbb{R}$) è uguale alla funzione identicamente nulla se e solo se $A=B=0$.

Per verificare che due funzioni sono linearmente indipendenti basta verificare che

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

25/10/19

in un punto x_0 .

10

Dimostrazione

- Consideriamo ora le soluzioni y_1, y_2 dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Per il nostro criterio y_1, y_2 sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione

Se z è una soluzione qualsiasi dell'equazione siano $A = z(x_0)$ e $B = z'(x_0)$.

Quindi z è soluzione del problema di

Cauchy
$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \\ y(x_0) = A \\ y'(x_0) = B \end{cases}$$

Ma anche $Ay_1 + By_2$ è soluzione dello stesso problema e quindi $z = Ay_1 + By_2$.

Struttura dell'integrale generale di una EDO lineare al II ordine

- Se $a(x)$, $b(x)$ e $f(x)$ sono continue nell'intervallo I allora l'integrale generale di $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ è

$$y = y_p + Ay_1 + By_2$$

con y_p soluzione particolare dell'equazione completa, y_1, y_2 soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata e A, B che variano in \mathbb{R}

Equazioni lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo l'equazione

$$y'' + ay' + by = 0$$

con a, b in \mathbf{R} .

Come abbiamo visto occorre cercare soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione. Cerchiamo soluzioni del tipo

$$y = e^{kx}$$

Equazione caratteristica

- Se $y = e^{kx}$ allora $y' = ke^{kx}$ e $y'' = k^2 e^{kx}$
quindi y è soluzione se e solo se

$$k^2 e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} = 0$$

cioè

$$(k^2 + ak + b)e^{kx} = 0$$

da cui ricaviamo

$$k^2 + ak + b = 0$$

Questa equazione è detta equazione caratteristica dell'equazione differenziale.

Discriminante positivo

- Se il discriminante

$$\Delta = a^2 - 4b > 0$$

allora l'equazione caratteristica ha due soluzioni reali k_1, k_2 e quindi l'equazione differenziale ha due soluzioni linearmente indipendenti

$$y_1(x) = e^{k_1 x} \quad y_2(x) = e^{k_2 x}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y = Ae^{k_1 x} + Be^{k_2 x}$$

Discriminante negativo

- Supponiamo ora che $\Delta = a^2 - 4b < 0$. In questo caso l'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate

$$k_1 = k_0 + i\omega \quad k_2 = k_0 - i\omega$$

Dove

$$k_0 = -\frac{a}{2} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Due soluzioni indipendenti sono quindi

$$z_1(x) = e^{k_0 x} e^{i\omega x}, \quad z_2(x) = e^{k_0 x} e^{-i\omega x}$$

Discriminante negativo

- $z_1(x) = e^{k_0 x} e^{i\omega x}$, $z_2(x) = e^{k_0 x} e^{-i\omega x}$ sono funzioni a valori complessi. Per trovare funzioni a valori reali ricordiamo che

$$e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x), \quad e^{-i\omega x} = \cos(\omega x) - i \sin(\omega x)$$

- Siccome l'equazione è lineare qualsiasi combinazione lineare delle due soluzioni è ancora soluzione. In particolare

$$y_1(x) = \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} = e^{k_0 x} \cos(\omega x), \quad y_2(x) = \frac{z_1(x) - z_2(x)}{2i} = e^{k_0 x} \sin(\omega x)$$

Discriminante negativo

- Le due soluzioni

$$y_1(x) = e^{k_0 x} \cos(\omega x), \quad y_2(x) = e^{k_0 x} \sin(\omega x)$$

Sono linearmente indipendenti. Infatti $\frac{y_1}{y_2}$ non è costante.

L'integrale generale dell'equazione omogenea e quindi

$$y(x) = c_1 e^{k_0 x} \cos(\omega x) + c_2 e^{k_0 x} \sin(\omega x)$$

Discriminante nullo

- Se il discriminante $\Delta = 0$ allora l'equazione caratteristica ha un'unica soluzione $k_0 = -\frac{a}{2}$. La funzione $y_1(x) = e^{k_0 x}$ è una soluzione dell'equazione differenziale, ma per trovare l'integrale generale ci servono due soluzioni linearmente indipendenti. Consideriamo la funzione

$$y_2(x) = C(x)e^{k_0 x}$$

Discriminante nullo

- Calcoliamo le derivate:

$$y_2'(x) = C'(x)e^{k_0x} + k_0C(x)e^{k_0x}$$

$$y_2''(x) = C''(x)e^{k_0x} + 2C'(x)k_0e^{k_0x} + k_0^2C(x)e^{k_0x}$$

- Sostituendo nell'equazione differenziale troviamo che

$$0 = y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x) = C''(x)e^{k_0x}$$

$$+ C'(x)(2k_0 + a)e^{k_0x} + C(x)(k_0^2 + ak_0 + b)e^{k_0x}$$

$$= C''(x)e^{k_0x} \Rightarrow C''(x) = 0 \Rightarrow C(x) = c_1x + c_2$$

Discriminante nullo

- Le funzioni $y_1(x) = e^{k_0 x}$ e $y_2(x) = x e^{k_0 x}$ sono linearmente indipendenti. Infatti

$$\frac{y_1}{y_2}$$

non è costante

Discriminante nullo

- Quindi y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale e quindi l'integrale generale dell'equazione è

$$y = Ae^{k_0 x} + Bxe^{k_0 x}$$

Esempio

- Risolvere il problema di Cauchy al II ordine

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Esempio

- Risolvere il problema di Cauchy al II ordine

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Esempio

- Risolvere il problema di Cauchy al II ordine

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Equazioni non omogenee

- Consideriamo ora un'equazione lineare al II ordine non omogenea:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

- L'integrale generale è dato da una soluzione particolare più l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. Dobbiamo quindi calcolare una soluzione particolare.

Calcolo della soluzione particolare

- Il metodo che utilizziamo per calcolare la soluzione particolare è detto “Metodo di somiglianza” e funziona nel caso in cui l’equazione omogenea associata ha coefficienti costanti e la forzante è un polinomio moltiplicato per un esponenziale e/o per $\cos(kx)$ e $\sin(kx)$.

Esempio

- Consideriamo l'equazione $y''+y'+y=x$
- La forzante è un polinomio di I grado. Si sceglie come soluzione particolare un polinomio generico di I grado: $y_p=A+Bx$, quindi si impone che y_p deve essere soluzione dell'equazione e si ricavano le costanti. In questo caso $A=-1$ e $B=1$. Una soluzione particolare dell'equazione è quindi

$$y_p = -1 + x$$

Esempio

- Calcolare una soluzione particolare di

$$y'' + y' = x^2$$

- In questo caso la scelta “ovvia” per la soluzione particolare sarebbe quella di scegliere y_p un polinomio di II grado. Questa scelta però non funziona. Questo succede perché uno dei termini di y_p è soluzione dell'equazione omogenea associata. In tal caso si sostituisce y_p con $x y_p$.

Regola generale

- Se la forzante è un polinomio allora la prima scelta per una soluzione particolare è quella di scegliere un polinomio generico dello stesso grado della forzante.
- Se la forzante è $f(x) = P(x)e^{rx}$ con $P(x)$ polinomio allora la prima scelta per una soluzione particolare è quella di scegliere $y_p = A(x)e^{rx}$ dove $A(x)$ è un polinomio generico dello stesso grado di $P(x)$.

Regola generale

- Se la forzante è $f(x) = P(x) e^{rx} \cos(kx)$
oppure $f(x) = P(x) e^{rx} \sin(kx)$
la prima scelta per una soluzione
particolare è quella di scegliere

allora

$$y_p = A(x) e^{rx} \cos(kx) + B(x) e^{rx} \sin(kx)$$

con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi generici dello
stesso grado di $P(x)$.

Regola generale: seconde scelte

- In ciascuno dei precedenti casi la prima scelta di y_p non funziona se uno dei suoi termini è soluzione dell'equazione omogenea associata. In questo caso si sostituisce y_p con xy_p . Può capitare che anche in xy_p ci siano termini che sono soluzioni dell'equazione omogenea associata: in tal caso si sostituisce xy_p con $x^2 y_p$

Esercizio

- Calcolare l'integrale generale di

$$y'' + y' = x^2$$

Esercizio

- Calcolare l'integrale generale di

$$y'' - y' = x + e^x$$