Analisi Matematica 2
IV esercitazione

1. PROBLEMA Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = e^{x^2+4y^2-8y}$ sull'insieme $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 \leq 16\}$. La funzione ammette massimi e minimi assoluti in $\mathbb{R}^2$?

2. PROBLEMA Determinare i punti di massimo e minimo di $f(x,y) = 1-x-y$ sul quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$.

3. PROBLEMA Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto delle seguenti funzioni sul vincolo a fianco indicato:

(1) $f(x,y) = e^x + e^y;\ x+y=2$
(2) $f(x,y) = xy;\ x+y-3=0$
(3) $f(x,y) = xy;\ (x-1)^2+y^2=1$
(4) $f(x,y) = xy+x^2;\ x+2y-4=0$
(5) $f(x,y) = x^4+y^4;\ x+y-2=0$
(6) $f(x,y) = (1+xy)^3;\ x^2+y^2=1$
(7) $f(x,y) = (x-1)^2+y^2;\ x^2-y^2=1$
(8) $f(x,y) = x^2+y^2;\ 4x^2+y^2-2xy=1$
(9) $f(x,y) = 4x(x^2-y^2)-3x^2+y^2;\ x^2-y^2=1/4$
(10) $f(x,y) = x^2+5y^2-\frac{1}{2}xy^2;\ x^2+4y^2-4=0$
(11) $f(x,y) = 3x+4y+1;\ 9x^2+4y^2-36=0$
(12) $f(x,y) = x+\log(2x+y);\ y+x^2-3=0$
(13) $f(x,y) = x^2+y^2-1;\ x^4+y^4=1$
(14) $f(x,y) = 2xy^2+x^5;\ x^4+y^2=1$
(15) $f(x,y) = 2x-y+1;\ x^2-2xy+2y^2=1$

4. PROBLEMA Si calcolino il valore massimo e il valore minimo di $f(x,y) = y^3-3xy+3y-1$ nell'insieme $\{(x,y) \mid x+3y=1,\ 0 \leq x \leq 20\}$.

5. PROBLEMA Risolvere i problemi di ottimizzazione

$$\begin{cases} \max(3x+y) \\ \text{sub} \\ 2x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min(3x+y) \\ \text{sub} \\ 2x^2+xy+y^2=1 \end{cases}.$$

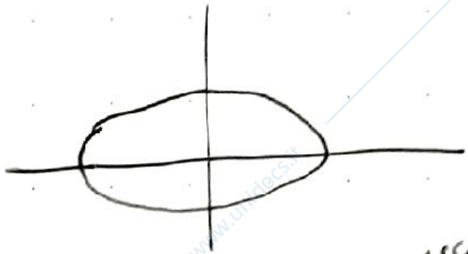
6. PROBLEMA Per ciascuna delle equazioni seguenti, calcolare l'integrale generale delle equazioni e l'unica soluzione tale che $y(0) = 0$, $y'(1) = -1$.

(1) $y'' - 4y' + 3y = 0$,
(2) $y'' + 2y' + 2y = 0$,
(3) $4y'' - 4y' + y = 0$.

① $$f(x,y) = e^{x^2+4y^2-8y}$$

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4y^2\le 16\}$$

$\downarrow$



Determinare massimo e minimo assoluti di f su C

$$\nabla f(x,y) = \Big(2x\,\overbrace{e^{x^2+4y^2-8y}}^{>0},\ (8y-8)\,\overbrace{e^{x^2+4y^2-8y}}^{>0}\Big)$$

$$\begin{cases} 2x=0 \\ 8y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

$G\ A(0,1)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2e^{x^2+4y^2-8y} + 4x^2 e^{x^2+4y^2-8y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2x(8y-8)\,e^{x^2+4y^2-8y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 8e^{x^2+4y^2-8y} + (8y-8)^2 e^{x^2+4y^2-8y}$$

$$\det H(0,1) = \det\begin{pmatrix} 2e^{-4} & 0 \\ 0 & 8e^{-4} \end{pmatrix} = 16e^{-8} > 0 \qquad 2e^{-4}>0$$

$\downarrow$

MINIMO

(Relativo o assoluto)?

Studio C

$\downarrow$ bordo

$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 16\}$$

Consiglio: quando vedi 2 quadrati si fa il camb. in coord. polari

così $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

di uso le coordinate polari

$x = r\cos\theta$

$y = \frac{r}{2}\sin\theta$

CAMBIO DI COORDINATE

$$r^2\cos^2\theta + \cancel{4}\frac{r^2}{\cancel{4}}\sin^2\theta = 16$$

$$r^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} = 16$$

$$r^2 = 16 \rightarrow r = \pm 4$$

le coordinate vogliono il raggio sempre positivo

$\rightarrow r = 4$

$$f(r,\theta) = e^{r^2\cos^2\theta + \cancel{4}\frac{r^2}{\cancel{4}}\sin^2\theta - \frac{8r\sin\theta}{2}} = e^{r^2 - 4r\sin\theta}$$

$$\hookrightarrow C'_{r,\theta} = \{(r,\theta) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi] : r = 4\}$$

$$\hookrightarrow f(4\theta) = e^{16 - 16\sin\theta}$$

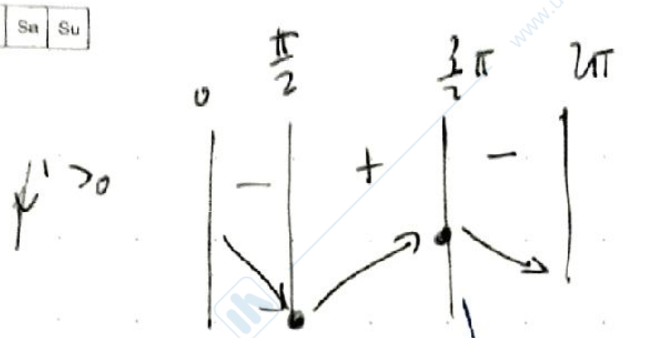
studio di funzione in una variabile

$$f'(4\theta) = -16\cos\theta\, \cancel{e^{16(1-\sin\theta)}} \geq 0$$

$\hookrightarrow \cos\theta \leq 0 \qquad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$

No. ES. ANALISI 2

Date 31 · 10 · 19



B: $\theta = \frac{\pi}{2}$

MINIMO

C: $\theta = \frac{3}{2}\pi$

MAX

ritraduciamo in X e Y

$B = (0, 2)$

MINIMO

$C = (0, -2)$

MASSIMO

Ora abbiamo i candidati per essere massimi e minimi assoluti

C per forza punto di max ASSOLUTO

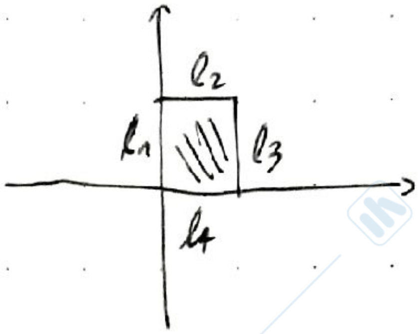
A vs B

$f(0,1) = e^{-4}$ → A punto di minimo assoluto

$f(0,2) = 1$

② $f(x,y) = 1 - x - y$

$Q = [0,1] \times [0,1]$



Determinare massimo e minimo di f su Q.

$l_1 = \{0\} \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x=0, 0 \le y \le 1\}$

$l_3 = \{1\} \times [0,1]$

. . . .

1. Studiamo f dentro a Q

$\nabla f(-1,1) \neq (0,0)$

$\downarrow$

non ci sono punti stazionari dentro

2. Studiamo la funzione sul bordo di Q

1° caso: su $l_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x=0 / 0 \le y \le 1\}$

$f(0,y) = 1 - y$ con $y \in [0,1]$ ← Studio dentro l_1

$f' = -1 \neq 0 \rightarrow$ no punti staz.

↳ Anche per gli altri casi non troviamo punti staz.

5

No. ES. ANALISI 2

Date 31 · 10 · 19

→ Devo studiare sul bordo di l_1, l_2, l_3, l_4

- Bordo di l_1: $(0,0)$, $(0,1)$ perché $l_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0, 0 \leq y \leq 1\}$

• $f(0,0) = 1$ • $f(0,1) = 0$

potenziale MAX — potenziale MIN. → $(0,1)$ non è né max né min.

- Bordo di l_2: • $f(0,1) = 0$ (pot. max) • $f(1,1) = -1$ (pot. minimo)

- Bordo di l_3: • $f(1,0) = 0$ • $f(1,1) = -1$

$= (1,0)$

- Bordo di l_4: • $f(0,0) = 1$ • $f(1,0) = 0$

→ MAX. ASS: $f(0,0) = 1$

MIN. ASS: $f(1,1) = -1$

3) (1) $f(x,y) = e^x + e^y$

$Q: x+y=2$

Determinare massimo e minimo assoluti di f su Q

è una retta, non studiamo dentro

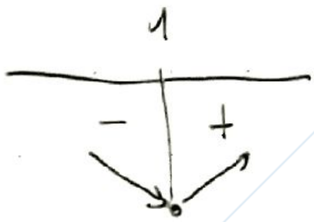
$f(x, 2-x) = e^x + e^{2-x}$

$f' = e^x - e^{2-x}$

$e^x \geq e^{2-x}$

$x \geq 2-x$

$x \geq 1$



pot. minimo

$(1,1)$ ← unico candidato a essere MINIMO ASSOLUTO

per Weierstrass dovrebbe esserci un max e min, ma su un insieme <u>chiuso e limitato</u>

non la retta

(2) $f(x,y)=xy$

$$Q: (x-1)^2+y^2=1$$

↳ Consideriamo $\begin{aligned} x-1 &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$

$$f(r,\theta)=(1+r\cos\theta)\,r\sin\theta$$

$$Q_{r,\theta}: r=1$$

$$f(1,\theta)=(1+\cos\theta)\sin\theta$$

$$f'=-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=\underbrace{-\sin^2\theta}_{\cos^2\theta-1}+\cos^2\theta+\cos\theta$$

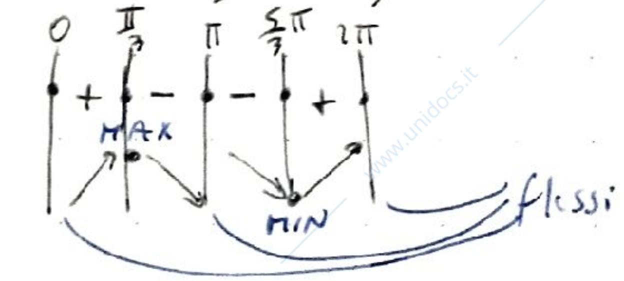
$$f'=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$$

$$\cos\theta_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} \begin{cases} -1 \rightarrow \theta=\pi \\ \frac{1}{2} \rightarrow \theta=\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$f'\geq 0 \quad \cos\theta\leq -1 \ \lor \ \cos\theta\geq\frac{1}{2}$

$\theta=\pi \qquad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{3} \ \cup \ \frac{5}{3}\leq\theta\leq 2\pi$ tra $[0,2\pi]$

$f'>0$



MASSIMO ASS. $= \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

MINIMO ASS. $= \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Consiglio: Chiedersi di che tipo è il vincolo:
- regione del piano
  - part. interna: ∇, H
  - bordo → curva
- curva
  - esplicit. il vincolo
  - moltipl. Lagrange

(13) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$Q: x^4 + y^4 = 1$

$g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$

questa è solo la curva non una regione (es. $x^4 + y^4 \leq 1$)

non usiamo il gradiente

Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 4\lambda x^3 = 0 \\ 2y + 4\lambda y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x(1 + 2\lambda x^2) = 0 \\ 2y(1 + 2\lambda y^2) = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

$\lambda \neq 0 \rightarrow (x = 0, y = 0 \notin x^4 + y^4 = 1)$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ \pm 2(1 + 2\lambda) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right), \left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=1 \\ \lambda=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \\ \lambda=-\frac{1}{2} \end{cases} \to \left(1,0,-\frac{1}{2}\right), \left(-1,0,-\frac{1}{2}\right)$$

$\lambda<0$

$$\begin{cases} 1+2\lambda x^2=0 \\ 1+2\lambda y^2=0 \\ x^4+y^4=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=-\frac{1}{2\lambda} \to x^2=y^2 \to x=\pm y \\ y^2=-\frac{1}{2\lambda} \\ 2x^4=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ \lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ \lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{cases} \ldots$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

MINIMI

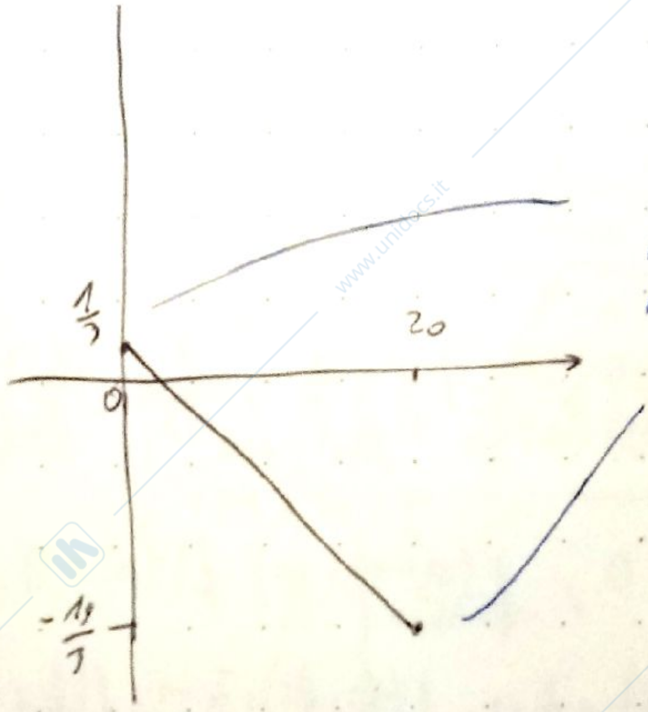
$$f(0,1)=0, \quad f(0,-1)=0, \quad f(1,0)=0, \quad f(-1,0)=0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}-1, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}-1, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}-1, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}-1$$

MASSIMI

(4) In questo esercizio ← Fare a casa

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 1,\ 0 \leq x \leq 20\}$$



andrebbe analizzato i bordi

(6)
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(1) = 1 \\ y'' - 4y' + 3y = 0 \end{cases} \qquad y = e^{kx}$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$y_1 = e^x \quad y_2 = e^{3x} \longrightarrow \text{indipendenti}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{-2x}$$

$$y = \underbrace{A e^x + B e^{3x}}_{A, B \in \mathbb{R}}$$

11 Mo Tu We ~~Th~~ Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 31. 10. 19

$$y(0) = \begin{cases} A+B=0 \\ Ae+3Be^3=-1 \end{cases} \quad y'(1) =$$

$$\begin{cases} A=-B \\ -Be+3Be^3=-1 \end{cases}$$

$$Be(3e^2-1)=-1$$

$$\begin{cases} B=-\dfrac{1}{e(3e^2-1)} \\ A=\dfrac{1}{e(3e^2-1)} \end{cases}$$

$$\boxed{y=\frac{e^x}{e(3e^2-1)}-\frac{e^{3x}}{e(3e^2-1)}} \leftarrow$$

(7)

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(1)=-1 \\ y''+2y'+2y=0 \end{cases}$$

$$K^2+2k+2=0$$

$$K_{1,2}=-2+\sqrt{4-8} \quad \Delta<0$$

$$=\frac{-2\pm 2i}{2}=\underbrace{-1\pm i}_{\alpha+i\omega}$$

$$y_1=Ae^{\overset{\alpha}{-x}}\cos(\overset{\omega}{-x})$$

$$y_2=Be^{-x}\sin(-x)$$

$$y=Ae^{-x}\cos x+Be^{-x}\sin(-x)$$

$$y(0)=A=0$$

$$y'=\cancel{-Ae^{-x}\cos x}^{A=0}-\cancel{Ae^{-x}\sin x}^{A=0}+Be^{-x}\sin x-Be^{-x}\cos x$$

...

Per $y'(1)=1 \longrightarrow B=\dfrac{e}{\sin 1-\cos 1}$

$$y=-\frac{e^{1-x}\sin x}{\sin 1-\cos 1}$$