Lezione 12/11

EDO al I ordine

Il metodo di variazione delle costanti

- Mentre il metodo di somiglianza determina una soluzione particolare di una EDO solo per particolari tipi di funzioni, il metodo di variazione delle costanti, in principio, funziona per ogni tipo di forzante.

Riduzione di ordine

- Una EDO al II ordine si può considerare come una EDO al I ordine in cui la funzione incognita è però a valori vettoriali: data una funzione y(x) consideriamo la funzione a valori vettoriali

$$v(x)=\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

Se y è soluzione y''+a(x)y'+b(x)y=f(x) allora

$$v'(x)=\begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y'(x) \\ -a(x)y'-b(x)y+f(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix} v(x)+\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Riduzione di ordine

- Quindi v(x) è soluzione dell'equazione

$$v'(x)=A(x)v(x)+w(x)$$

dove

$$A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}, \quad w(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

- E' chiaro che trovare una soluzione per questa equazione è equivalente a trovare una soluzione per l'equazione originale y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)

La matrice wronskiana

- Sappiamo che se i coefficienti a(x) e b(x) di

$$y''+a(x)y'+b(x)y=0$$

sono funzioni continue allora lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.

- Siano y_1, y_2 due soluzioni linearmente indipendenti. La matrice Wronskiana della EDO è

$$\boldsymbol{W}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix}$$

Wronskiano

- Il determinante della matrice wronskiana è chiamato wronskiano e si indica con W(x), quindi

$$W(x) = det\, \boldsymbol{W}(x)$$

Proprietà del wronskiano

- Teorema: Sia I l'intervallo di definizione dei coefficienti dell'equazione y''+a(x)y'+b(x)y=0 .

  Si ha che $W(x) \neq 0$ per ogni x in I.
- Dimostrazione: Siano
- $$v_1(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y'_1(x) \end{pmatrix}, \quad v_2(x) = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y'_2(x) \end{pmatrix}$$
- Se $W(x_0) = 0$ allora esiste una combinazione lineare non banale tale che

$$c_1 v_1(x_0) + c_2 v_2(x_0) = \vec{0}$$

Continuazione della dimostrazione

quindi $y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+a(x)y'+b(x)y=0 \\ y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=0 \end{cases}$$

Quindi $y=c_1 y_1+c_2 y_2 \equiv 0$ contraddicendo il fatto che y_1, y_2 sono indipendenti.

Proprietà della matrice wronskiana

- Si ha che $\left(\boldsymbol{W}(x)\right)' = A(x)\boldsymbol{W}(x)$
- Questo fatto discende facilmente dal fatto che le colonne di $\boldsymbol{W}(x)$ sono soluzioni di

$$v' = A(x)v$$

Metodo di variazione delle costanti

- Cerchiamo una soluzione particolare del sistema $v' = A(x)v + w(x)$ scegliendo una soluzione del tipo

$$v_p = c_1(x)v_1 + c_2(x)v_2 = \boldsymbol{W}(x)\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$$

Metodo di variazione delle costanti

- Sostituendo nel sistema troviamo

$$v_p' = A(x) v_p + w(x)$$

- D'altra parte

$$v_p' = \left(\boldsymbol{W}(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \right)' = \boldsymbol{W}(x)' \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + \boldsymbol{W}(x) \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix}$$

Metodo di variazione delle costanti

- Usando le proprietà della matrice Wronskiana troviamo

$$v_p' = A(x)\boldsymbol{W}(x)\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + \boldsymbol{W}(x)\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = A(x)v_p + \boldsymbol{W}(x)\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix}$$

Quindi dobbiamo avere che

$$A(x)v_p + \boldsymbol{W}(x)\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = A(x)v_p + w(x)$$

Metodo di variazione delle costanti

- Alla fine si ottiene che

$$\boldsymbol{W}(x)\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = w(x)$$

e, ricordando che $W(x) \neq 0$ per ogni x,

$$\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \boldsymbol{W}(x)^{-1} w(x) \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \int \boldsymbol{W}(x)^{-1} w(x)\, dx$$

Metodo di variazione delle costanti

- Ricordando che $w(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$ e

$$\boldsymbol{W}(x)^{-1}=\frac{1}{y_1 y'_2-y_2 y'_1}\begin{pmatrix} y'_2 & -y_2 \\ -y'_1 & y_1 \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \int \frac{-y_2 f(x)}{y_1 y'_2-y_2 y'_1} dx \\ \int \frac{y_1 f(x)}{y_1 y'_2-y_2 y'_1} dx \end{pmatrix}$$

Esercizio

- Calcolare una soluzione particolare di

$$y''-y=\sinh(x)$$

Esercizio

- Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+y=\tan(x) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$$

EDO lineari del I ordine

- Un’equazione lineare del I ordine è una EDO del tipo

$$y'+p(x)y=q(x)$$

che in forma normale si scrive

$$y'=-p(x)y+q(x)$$

Problema di Cauchy per le equazioni lineari del I ordine

- Teorema: Siano p(x) e q(x) funzioni continue definite nell'intervallo (a,b) e siano dati $x_0 \in (a, b)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$.

Allora il problema di Cauchy $\begin{cases} y' + p(x) y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

ha una soluzione y(x) definita su (a,b) e questa soluzione è unica.

Equazioni lineari del I ordine: integrale generale

- Dimostrazione: Sia $\mu(x)$ una primitiva di p(x).

Allora

$$(e^{\mu(x)}y)'=\mu'(x)e^{\mu(x)}y+e^{\mu(x)}y'=e^{\mu(x)}(y'+p(x)y)=e^{\mu(x)}q(x)$$

quindi

$$e^{\mu(x)}y=\int e^{\mu(x)}q(x)dx$$

e quindi

$$y=e^{-\mu(x)}\int e^{\mu(x)}q(x)dx$$

Soluzione del problema di Cauchy

- Se A(x) è una qualsiasi primitiva di $e^{\mu(x)} q(x)$ allora

$$y = e^{-\mu(x)}(A(x)+c) = e^{-\mu(x)} A(x) + ce^{-\mu(x)}$$

- Siccome richiediamo $y(x_0) = y_0$ dobbiamo avere

$$y_0 = e^{-\mu(x_0)} A(x_0) + ce^{-\mu(x_0)}$$

da cui necessariamente $c = e^{\mu(x_0)} y_0 - A(x_0)$

Esempio

- Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x^2 y + 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esempio

- Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y' + y = x^2 e^{1/x} \\ y(1) = 3e \end{cases}$$

Esempio

- Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} N'(t) = \epsilon N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Equazioni a variabili separabili

- Le equazioni a variabili separabili sono equazioni del tipo

$$y' = a(x)\,b(y)$$

Soluzione di un'equazione a variabili separabili

- Teorema: Se a(x) è una funzione continua definita su un intervallo I e b(y) è una funzione di classe C^1 definita su un intervallo J allora, dato $x_0 \in I$, esiste un intorno I' di x_0 e una funzione $y \in C^1(I')$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)\, b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Inoltre questa soluzione è unica.

Dimostrazione dell'esistenza della soluzione

- Se $b(y_0)=0$ allora la funzione costante $y=y_0$ è soluzione del problema.
- Se $b(y_0)\neq 0$ allora, siccome b è continua, b(y) è diversa da zero in un intorno J' di y_0 .
- Scegliamo una primitiva B(y) di $\dfrac{1}{b(y)}$.
- Siccome B'(y) ha segno costante in J', B è invertibile.

Continuazione della dimostrazione

- Scegliamo una primitiva A(x) di a(x) e un intorno I' di x_0 in cui la funzione

$$y(x)=B^{-1}(A(x)-A(x_0)+B(y_0))$$

è definita.

- La funzione y è soluzione del problema di Cauchy, infatti è ovvio che $y(x_0)=y_0$.

Fine della dimostrazione

- Inoltre $\frac{d}{dx}B(y(x))=\frac{y'(x)}{b(y)}$. D'altra parte

$$B(y(x))=(A(x)-A(x_0)+B(y_0))$$

quindi

$$\frac{d}{dx}B(y(x))=A'(x)=a(x)$$

da cui otteniamo $\frac{y'(x)}{b(y)}=a(x)$ ovvero

$$y'(x)=a(x)b(y)$$

Esempio

- Calcolare la soluzione dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$