Analisi Matematica 2
II esercitazione

1. PROBLEMA Verificare se $f(x,y) = e^x \sin y$ è differenziabile in $(1,\pi)$ e calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,\pi,0)$. Calcolare inoltre la derivata direzionale $D_v f(1,\pi)$ dove $v = 3/5\vec{i} + 4/5\vec{j}$.

2. PROBLEMA Verificare se $f(x,y) = \log(x^2+y^4)$ è differenziabile in $(1,-1)$ e calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,-1,\log 2)$.

3. PROBLEMA Verificare se $f(x,y) = \frac{y^2(e^x-1)}{x^2+y^2}$ è differenziabile in $(1,1)$ e calcolare l'approssimazione lineare di f in $(1,1)$ e l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,(e-1)/2)$.

4. PROBLEMA Verificare se $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-2}$ è differenziabile in $(1,1)$ e calcolare l'approssimazione lineare di f in $(1,1)$ e l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,1/4)$.

5. PROBLEMA Verificare che i piani tangenti al grafico della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - x$ passano per l'origine.

6. PROBLEMA Data la superficie S di equazione $z = xy$ individuare i punti P in cui il piano tangente a S è parallelo al piano xy.

7. PROBLEMA Data la funzione $f(x,y) = x \sin y$, individuare in quale direzione $D_v f(1,1) = 0$.

8. PROBLEMA Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$F(x,y) = \sqrt{6 + x^2 + 2y^2x^2}.$$

Verificare che F è differenziabile in $(1,1)$, calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di F in $(1,1,3)$ e l'equazione della retta tangente alla curva di livello $F(x,y) = 3$ nel punto $(1,1)$.

9. PROBLEMA Data la superficie di equazione $z = 3x^2 - 3y^2 + 2x - xy$ e il punto $P = (1,1)$, in un intorno di P:

- qual'è la direzione di massima pendenza? Quanto vale la massima pendenza?
- in quali direzioni la pendenza sale o scende?
- in quale direzione la pendenza è di 30°?
- in quale direzione la pendenza è $arctan(7)$?

10. PROBLEMA Si calcolino i punti sulla curva di equazione $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$ in cui la retta tangente è parallela alla retta $x = y$.

11. PROBLEMA Si calcolino i punti sulla conica di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = -1$$

in cui le tangenti alla curva passano per $(-1, -1)$.

12. PROBLEMA Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$F(x, y) = xy + y^2 + 2x.$$

(1) Verificare che F è differenziabile in $(1, 1)$.
(2) Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di F nel punto $(1, 1, 4)$.
(3) Calcolare l'equazione della retta tangente alla curva di livello $F(x, y) = 4$ nel punto $(1, 1)$.

13. PROBLEMA Data la curva di livello

$$\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}$$

calcolare tutti i punti di intersezione della curva con la retta $x = y$ e, in ciascun punto trovato, calcolare l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva.

14. PROBLEMA Calcolare i punti sull'ellisse di equazione $2x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + 3x = \frac{7}{6}$ in cui la retta tangente all'ellisse è ortogonale alla retta $x - 2y = 1$.

15. PROBLEMA Calcolare l'equazione cartesiana della rette passanti per $(1, 1)$ o per $(1, 0)$ e tangenti alla curva formata dai punti del piano che soddisfano l'equazione

$$x^3 + 3y^2 - 3xy = 1.$$

16. PROBLEMA Calcolare i punti sulla curva di equazione

$$x^2 - xy + 2y^2 - 7x = -\frac{7}{4}$$

in cui la tangente alla curva è parallela alla retta $x + 2y = 100$.

No. Es. ANALISI 2

Date 17 · 10 · 19

Differenziabilità

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \right)$$

1.

$f(x,y) = e^x \sin y$

a. Studiare se è diff. in $(1,\pi)$

b. equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, \pi, f(1,\pi)=0$

c. Calcolare $D_v f(1,\pi)$ $\quad v = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$

→ a. $\nabla f(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$

e^x, $\sin y$, $\cos y$ sono continue quindi le derivate parziali sono continue in un intorno $(1,\pi)$

↳ Quindi f è diff. in $(1,\pi)$ — Teorema del diff. totale

2

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 17. 10. 19

b.

$$a(z-z_0)+b(x-x_0)+c(y-y_0)=0$$

$$v=(a,b,c)$$

$$P=(x_0,y_0,z_0)$$

eq piano tg.

$$z-f(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

$$\nabla f(1,\pi)=(0,-e)$$

$$f(1,\pi)=0$$

$$\hookrightarrow \quad z=-e(y-\pi)$$

c.

$$D_v f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot v$$

$$D_v f(1,\pi)=(0,-e)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=-\frac{4}{5}e$$

2.

$$f(x,y) = \lg(x^2+y^2)$$

a. Studiare se è diff. in $(1,-1)$

b. equazione del piano tg al grafico di f in $(1,-1,\lg 2)$

→ a. $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{2x}{x^2+y^4}, \dfrac{4y^3}{x^2+y^4}\right)$ in $(1,-1)$

$\nabla f(1,-1) = (1,-2)$

b. $z - \lg 2 = 1(x-1) - (-2)(y+1)$

$z = x - 2y - 3 + \lg 2$

non in 0

es $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \dfrac{2x}{x^2+y^4}$

metodo 2 curve diverse

$\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{2t}{t^2} = +\infty$

$\lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$

non cont. in $(0,0)$

4

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 17. 10. 19

(4) $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$

a. Stabilire se è diff. in (1, 1)

b. scrivere l'approx. lineare di f in (1, 1)

c. equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 1, \frac{1}{4})$

→ a. $\nabla f(x,y) = \left(-2\frac{2x}{(x^2+y^2)^3}, -2\frac{2y}{(x^2+y^2)^3}\right)$

è diff. in (1, 1)

$\nabla f(1,1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

b. $L(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1)$

c. $z = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4}$

5 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - x$

Verificare che i piani tangenti al suo grafico passano tutti per l'origine.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} - 1, \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

$P = (a,b)$ $\quad \nabla f(a,b) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - 1, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$

$(a,b) \neq (0,0)$

$$z - \left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - 1 \right)(x-a) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(y-b)$$

non diff. in $(0,0)$

$\hookrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{t\cos\theta}{\sqrt{t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta}} = \lim_{t\to 0^+} \cos\theta = \cos\theta$

dipende da θ

$$z - \cancel{\sqrt{a^2+b^2}} + \cancel{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \cancel{a} - x - \cancel{\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}} + \frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}} - \cancel{\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$z = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - 1 \right)x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y$$

8. $F(x,y) = \sqrt{6 + x^2 + 2y^2x^2}$

a. Verificare che è diff. in $(1,1)$

b. Calcolare l'eq. piano tg al grafico in $(1,1,3)$

c. Calcolare l'eq. retta tg. alla curva di livello $F(x,y) = 3$ in $(1,1)$

→ a. $\nabla F(x,y) = \left(\frac{1}{2} \frac{2x + 4y^2x}{\sqrt{6+x^2+2y^2x^2}} ; \frac{1}{2} \frac{4yx^2}{\sqrt{6+x^2+2x^2y^2}} \right)$

↳ F è diff. in $(1,1)$

b. $\nabla F(1,1) = \left(1 ; \frac{2}{3}\right)$

$z - 3 = (x-1) + \frac{2}{3}(y-1)$

c. Vogliamo che il prodotto scalare

$\nabla f \cdot v_{P-P_0} = 0$

perché il gradiente è un vettore in 2 dimensioni

$(a,b)(x-x_0, y-y_0) = 0$

↳ $a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$

$1(x-1) + \frac{2}{3}(y-1) = 0$

il gradiente è sempre perpendicolare a una curva di livello

(9) $z = 3x^2 - 3y^2 + 2x - xy$

$P = (1, 1, 1)$

a. Qual è la direzione di massima pendenza? Quanto vale?

b. In quali direzioni la pendenza sale e scende?

c. In quale direzione la pendenza è 30°? e arctg 7?

→ a. $\nabla f(x, y) = (6x + 2 - y, -6y - x)$

$\nabla f(1,1) = (7, -7)$

pendenza $= D_v f(x_0, y_0)$

$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$

$= \|\nabla f(x_0, y_0)\| \, \cancel{\|v\|}^{1} \cos\theta = 7\sqrt{2}$

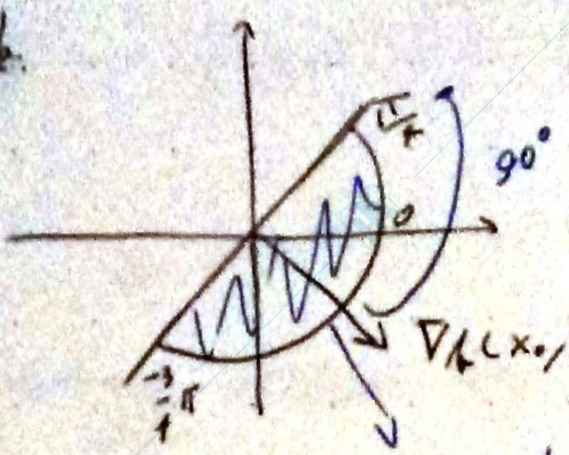
Se $\theta = 0 \rightarrow D_v$ è max

8

No. ES. ANALISI 2

Date 17. 10. 19

b.



$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix}$

in questa zona cresce

$\cos\theta > 0 \quad - \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

rispetto al gradiente

prendiamo la direzione di $\nabla f(x_0, y_0) = (7, -7)$ e prendiamo 90° da una parte e 90° dall'altra

<u>c.</u>

1. $D_v f(1,1) = tg\, 30°$

2. $D_v f(1,1) = 7$

3. $\nabla f(1,1) v = 7a - 7b \qquad v = (a, b)$

$$7a - 7b = 7 \rightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

9

No. ES. ANALISI 2

Date 17 . 10 . 19

1: $\frac{\sqrt{3}}{3} = 7a - 7b \rightarrow \begin{cases} a = \frac{21b + \sqrt{3}}{21} \\ \sqrt{a^2+b^2} = 1 \end{cases}$

...

10

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2$$

Trovare P sulla curva tale che la retta tg in P è parallela a $x=y$

$$F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$F(x,y) = 2$$

$$P = (a,b)$$

$$\nabla F(a,b) = (2a+2b, 2a+2b)$$

$$(2a+2b)(x-a) + (2a+2b)(y-b) = 0$$

$$1 \cdot x - 1 \cdot y = 0$$

$$\begin{cases} 2a+2b = c \cdot 1 \\ 2a+2b = -c \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+4b = 0 \\ \Rightarrow \boxed{a=-b} \end{cases}$$

$\Rightarrow P = (-b, b)$

↳ dobbiamo verificare che P sia sulla curva

$$\cancel{y^2} - 2\cancel{b^2} \pm \cancel{b^2} = 2 \quad \text{impossibile}$$

$\downarrow$

non esiste
nessun punto P
che ha questa
proprietà.

(13.)

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}$$

a. Calcolare i punti di intersezione con $x = y$

b. Per ciascuno di tali calcolare la retta tg alla curva.

$\rightarrow$ a.
$$\begin{cases} \cos x \sin y = \frac{1}{2} \\ x = y \end{cases} \qquad \sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

b. $F(x,y) = \cos x \sin y$

$$\nabla F(x,y) = (-\sin x \sin y, \cos x \cos y)$$

$\frac{\pi}{4}+k\pi$

$$\nabla F\left(\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right) = \left(\underbrace{-\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}, \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & k \text{ pari} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & k \text{ pari} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

ma sono alla seconda dunque non ci sono variazioni di segno anche dipendono da k

$$\nabla F\left(\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \leftarrow$$

$$t_p: \quad -\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}+k\pi\right) + \frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}+k\pi\right) = 0 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -y$$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 17. 11. 19

(15.) $x^3+3y^2-3xy=1$

Calcolare le rette passanti per (1,1) tangenti alla curva di livello.

$$f(x,y)=x^3+3y^2-3xy$$

$$\nabla f(x,y)=(3x^2-3y,\ 6y-3x)$$

$$\nabla f(a,b)=(3a^2-3b,\ 6b-3a)$$

Caso $P=1,1$

tp: $3(y-1)=0$