Analisi Matematica 2
VI esercitazione

1. Metodo di variazione delle costanti

1. PROBLEMA Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

2. PROBLEMA Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \tan x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

2. Equazioni lineari al I ordine

3. PROBLEMA Calcolare l'integrale generale di

(1) $y' = \frac{y}{x \ln x} + \ln x$.
(2) $y' = \frac{y + \ln x}{x}$.

4. PROBLEMA Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(1) $\begin{cases} y' = \frac{y+1}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

(2) $\begin{cases} y' = \frac{x}{x^2+1} y \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

(3) $\begin{cases} y' = \frac{x^3}{x^3+1}(y-2) \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

(4) $\begin{cases} y' = \frac{2y}{x} + 3x^2 \cos x \\ y(\pi) = 3\pi^3 \end{cases}$.

5. PROBLEMA Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\cos x + xe^{\sin x} \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

determinare se la soluzione è definita su tutto l'asse reale e in tal caso calcolarla.

3. Variabili separabili

6. PROBLEMA Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(1) $\begin{cases} y' = \frac{(1+y)^2}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$.

(2) $\begin{cases} xy' = y\log y \\ y(1) = e \end{cases}$.

(3) $\begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

(4) $\begin{cases} y' = 2y(1-\frac{1}{3}y) \\ y(0) = 4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} y' = 2y(1-\frac{1}{3}y) \\ y(-5) = 3 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$

1

$$\begin{cases} y'' + y = \underbrace{\dfrac{1}{\cos x}} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

→ non funziona il metodo di somiglianza

il problema è definito in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Integrale generale dell'equazione omogenea

$k = \pm i$

$y_{om} = A\cos x + B\sin x$

Costruiamo la wronskiana

$$W = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \qquad y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

dove

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \int \underbrace{W(x)^{-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix} dx$$

$$\frac{1}{\underbrace{\det W(x)}_{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$t = \cos x$

$dt = -\sin x\, dx$

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} -\frac{\sin x}{\cos x} \\ 1 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} \int -\frac{\sin x}{\cos x} dx \\ \int 1\, dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\ln|\cos x| \\ x \end{pmatrix}$$

$\rightarrow y_p = \ln|\cos x|\cos x + x\sin x$

2

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Date 14 . 11 . 17

$$\begin{cases} y(0) = 1 = A \\ y'(0) = -1 = B \end{cases}$$

$$y = \ln(\cos(x))\cos x + x\sin x + A\cos x + B\sin x$$

$$y' = -\sin x - \sin x \ln(\cos(x)) + \sin x + x\cos x - A\sin x + B\cos x$$

$$\hookrightarrow y(x) = \ln(\cos(x))\cos x + x\sin x + \cos x - \sin x$$

(2)

$$\begin{cases} y'' + y = \operatorname{tg} x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \qquad y_{om} = A\cos x + B\sin x$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$W(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix} dx = \int \begin{pmatrix} -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \\ \sin x \end{pmatrix} dx$$

$$C_2(x) = -\cos x$$

$$C_1(x) = \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = -\int \frac{1}{\cos x} + \overbrace{\int \cos x}^{\sin x} =$$

integrale complicato

$$\cos x = \sin(\underbrace{x + \tfrac{\pi}{2}}_{s})$$

$$= \int \frac{1}{\sin(s)}\,ds = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)\cos\left(\frac{s}{2}\right)}\,ds = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos^2\left(\frac{s}{2}\right)dt}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)\cos\left(\frac{s}{2}\right)}$$

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{s}{2}\right) \qquad dt = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2}ds$$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt = \lg|t| = \lg\left(tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$c_1(x) = -\lg\left(tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) + \sin x$$

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + \left(-\lg\left(tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) + \cancel{\sin x}\right)\cos x \; \cancel{-\cos x \sin x}$$

$$y'(x) = -A\sin x + B\cos x - \frac{\cos x}{\underbrace{2tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}_{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}} + \lg\left(tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\sin x$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 = A \\ y'(0) = -\cancel{1} = B - \cancel{1} \rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = \left(1 - \lg\left(tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\cos x$$

3) Risolvere

$$\begin{cases} y' = \frac{y+1}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0) \cup \boxed{(0, +\infty)}$ prendo questo perché in cond. iniz. c'è $y(1) = 0$

$$y' + p(x)y' = q(x)$$

$$\rightarrow y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$$

Vogliamo calcolare una primitiva $\mu(x)$ di $p(x)$

$$\mu(x) = -\lg|x| \rightarrow$$ vogliamo trovare il massimo intervallo in cui il problema ha senso $\rightarrow 0 < x < +\infty$

$$\mu(x) = -\lg x$$

Sappiamo che:

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} q(x)\, dx$$

$$y(x) = e^{\ln x} \int \frac{\overbrace{e^{-\ln x}}^{x^{-1}}}{x}\, dx = \overbrace{e^{\ln x}}^{x} \int \frac{1}{x^2}\, dx =$$

$$y(x) = x\left(-\frac{1}{x} + c\right) = -1 + cx$$

$$y(1) = 0 \qquad -1 + c = 0 \qquad c = 1$$

$$y(x) = x - 1$$

(4) $y' = \frac{y}{x\ln x} + \ln x \rightarrow x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$

$(0,1) \cup (1, +\infty)$

Se avevamo una condizione iniziale sceglievamo l'intervallo in cui stava l'x fissato

$$\mu(x) = -\int \frac{1}{x\ln x}\, dx$$

$$= -\ln(|\ln x|) = -\ln(\ln x)$$

qui supponiamo in $(1, +\infty)$

$$y(x) = e^{+\ln(\ln x)} \int e^{-\ln(\ln x)} \ln x\, dx =$$

$$= \ln x \cdot \left(\int (\ln x)^{-1} \ln x\, dx\right) =$$

$$= \ln x\,(x + c)$$

5

No. ES. ANALISI 2

Date ~~14~~ 11. 19

(5)
$$\begin{cases} y' = \frac{(y+1)^2}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases} \longrightarrow (0,+\infty)$$

Metodo a variabili separabili

$$y' = \frac{1}{x}(y+1)^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(y+1)^2$$

$$\int \frac{dy}{(y+1)^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{y+1} = \ln|x| + C = \ln x + C$$

raggruppo le costanti degli indefiniti in una C

$$y(1) = -1 - \frac{1}{\ln x + c}$$

$$y(1) = 2 = -1 - \frac{1}{c} \qquad c = -\frac{1}{3}$$

$$y(x) = -1 - \frac{1}{\ln x - \frac{1}{3}}$$

La soluzione è definita in un intervallo più piccolo

$\rightarrow \ln x + \frac{1}{3}$

(6)

$$\begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y' = \underbrace{1}_{A(x)} \cdot \underbrace{y(1-y)}_{b(y)}$$

$$\frac{dy}{y(1-y)} = dx$$

$$\int \frac{1}{y(1-y)} = x + c$$

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A(1-y) + By}{y(1-y)} = \frac{A + (B-A)y}{y(1-y)} = \frac{1}{y(1-y)}$$

$$A = 1 = B$$

$$B - A = 0$$

$$\ln|y| - \ln|1-y| = x + c$$

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + c$$

$$\frac{y}{1-y} = ke^x \qquad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = k \qquad k = 1$$

$$\downarrow$$

$$k > 0$$

$$y = e^x(1-y) \qquad y = \frac{e^x}{1+e^x}$$