

Lezione 26/11

Integrale doppio

Forme differenziali

- Esiste un'altra notazione per descrivere i campi vettoriali.
- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j}$ è un campo piano allora chiamando $dx = \vec{i}$, $dy = \vec{j}$ il campo può essere riscritto come

$$F(x, y) = F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$$

Un campo vettoriale scritto con questa notazione viene chiamato forma differenziale sul piano.

Forme differenziali sullo spazio

- Naturalmente a un campo vettoriale nello spazio

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}$$

corrisponde la forma differenziale sullo spazio

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$$

Differenziale di una funzione scalare

- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di due variabili allora abbiamo già definito il differenziale di F come la forma differenziale

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

- Si noti che il campo vettoriale che corrisponde al differenziale di F non è altro che il gradiente di F .

Differenziale di una funzione di tre variabili

- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di tre variabili allora il differenziale di F è la forma differenziale

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

- Il campo vettoriale che corrisponde al differenziale di F è il gradiente di F .

Definizioni

- Una forma differenziale si dice esatta se è il differenziale di una funzione.
- Un campo vettoriale si dice irrotazionale se il suo rotore è nullo.
- Una forma differenziale si dice chiusa se il campo vettoriale che le corrisponde è irrotazionale.

Osservazioni

- Dire che una forma è esatta è equivalente a dire che il campo che le corrisponde è conservativo.
- Se una forma è esatta allora è chiusa.
- In un dominio semplicemente connesso ogni forma chiusa è esatta.

Integrale di linea di forme differenziali

- Se $F(x, y) = F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$ è una forma differenziale e $r: [a, b]$, $r(t) = (x(t), y(t))$ è un arco liscio allora l'integrale della forma su r è l'integrale

$$\int_r F := \int_a^b F_1(x, y) dx + \int_a^b F_2(x, y) dy$$

con gli integrali a destra calcolati ponendo $x=x(t)$ e $y=y(t)$.

Esempio

- Si calcoli l'integrale di $F = (2x + y)dx + (2y + x)dy$ su

$$r: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad r(t) = (\cos t, \sin t)$$

Osservazione

- Si noti che l'integrale di una forma differenziale su un arco liscio non è altro che l'integrale di linea del corrispondente campo vettoriale.

Definizione di integrale

- In Analisi 1 l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ viene definito come il limite delle somme di Riemann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(t_k)$$

dove si è suddiviso l'intervallo $[a,b]$ in n intervallini di eguale ampiezza e si è scelto un punto t_k in ogni intervallino.

Definizione di integrale doppio

- In due variabili si procede in modo analogo. Sia $R=[a,b] \times [c,d]$ un rettangolo e suddividiamo $[a,b]$ e $[c,d]$ in n intervallini di eguale ampiezza. In questo modo abbiamo suddiviso R in n^2 rettangolini. In ciascun rettangolino scegliamo un punto (x_k, y_k) . Sia $F: R \rightarrow \mathbb{R}^2$ una funzione e formiamo la somma di Riemann

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{(a-b)(c-d)}{n^2} F(x_k, y_k)$$

Definizione di integrale doppio

- L'integrale doppio di F è

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{(a-b)(c-d)}{n^2} F(x_k, y_k)$$

Integrale di funzioni definite su domini limitati

- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di due variabili e D è un dominio limitato allora esiste un rettangolo R che contiene D . Si definisce una nuova funzione $\tilde{F} : R \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\tilde{F}(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin D \end{cases}$$

- Diremo che la funzione F è integrabile se esiste finito $\iint_R \tilde{F}(x, y) dx dy$

e si definisce l'integrale doppio di F come

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \iint_R \tilde{F}(x, y) dx dy$$

Interpretazione geometrica

- L'integrale di una funzione f di una variabile è dato dalla differenza tra l'area della parte di piano che sta tra l'asse x e la parte di grafico che sta sopra l'asse x e l'area della parte di piano che sta tra l'asse x e la parte di grafico che sta sotto l'asse x .

Interpretazione geometrica

- Analogamente l'integrale doppio di una funzione di due variabili è la differenza tra il volume della parte di spazio che sta tra il piano xy e la parte di grafico che sta sopra il piano xy e il volume della parte di spazio che sta tra il piano xy e la parte di grafico che sta sotto il piano xy .

Proprietà dell'integrale doppio

- Se D è un sottoinsieme del piano allora si definisce $Area(D) = \iint_D dx dy$
- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di due variabili e D ha area nulla, allora $\iint_D F(x, y) dx dy = 0$
- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni di due variabili integrabili allora $F+G$ è integrabile e

$$\iint_D (F(x, y) + G(x, y)) dx dy = \iint_D F(x, y) dx dy + \iint_D G(x, y) dx dy$$

Proprietà dell'integrale doppio

- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile e c è una costante allora cF è integrabile e

$$\iint_D cF(x, y) dx dy = c \iint_D F(x, y) dx dy$$

Si noti che quest'ultima proprietà implica che

$$\iint_D 0 dx dy = 0$$

Proprietà dell'integrale doppio

- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile e positiva allora

$$\iint_D F(x, y) dx dy \geq 0$$

In particolare se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ sono integrabili e $F(x, y) \leq G(x, y)$ allora

$$\iint_D F(x, y) dx dy \leq \iint_D G(x, y) dx dy$$

- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile allora anche $|F|$ è integrabile e

$$\left| \iint_D F(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |F(x, y)| dx dy$$

Integrabilità

- Il fatto che una funzione $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ sia integrabile non dipende solo dalla regolarità della funzione (ad esempio che F sia continua), ma anche da come è fatto il dominio D .
- Una classe di domini su cui le funzioni continue sono integrabili sono i domini regolari.

Domini x -semplici e y -semplici

- Un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ si dice y -semplice se D è compreso tra due rette verticali $x=a$ e $x=b$ e tra i grafici di due funzioni continue $c:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $d:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $c(x) \leq d(x)$. Quindi

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$$

- Un dominio si dice x -semplice se esistono $c, d \in \mathbb{R}$ e due funzioni continue $a:[c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ e $b:[c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ con $a(y) \leq b(y)$ tali che

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$$

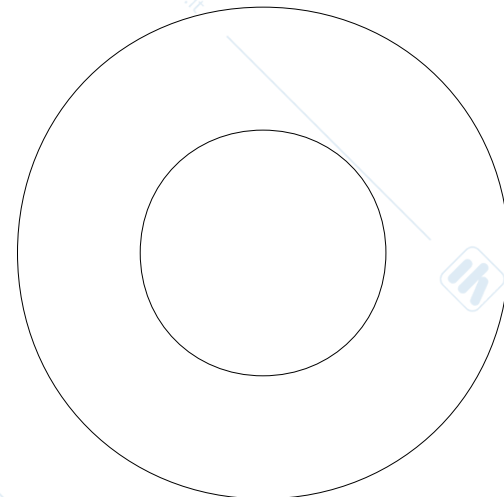
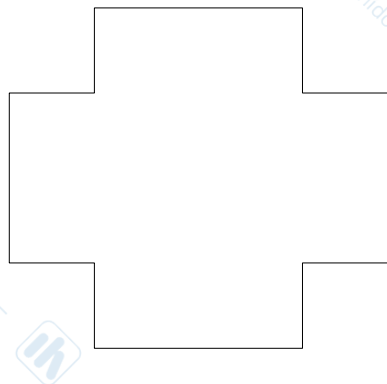
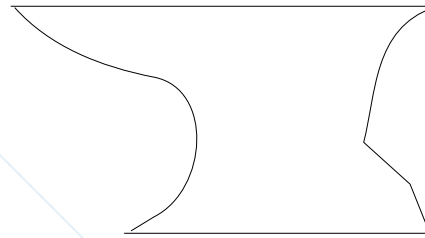
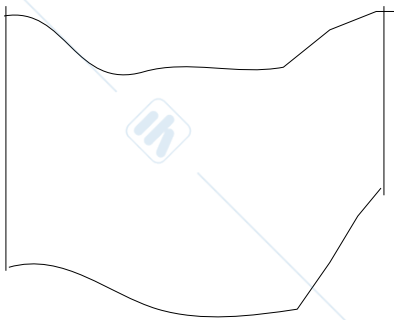
Domini non sovrapposti

- Due domini D_1 e D_2 si dicono non sovrapposti se si intersecano solo sul bordo, cioè $D_1 \cap D_2$ non ha punti interni.

Domini regolari

- Un dominio regolare è un dominio che è unione finita di domini x -semplici o y -semplici non sovrapposti.

Esempi



Criterio di integrabilità

- Se D è regolare e $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua allora F è integrabile, cioè

$$\iint_D F(x, y) dx dy$$

esiste finito.

Calcolo dell'integrale

- Se il dominio D è regolare esiste un metodo di calcolo dell'integrale detto integrazione iterata.

Integrazione iterata su domini y- semplici

- Sia D un dominio y-sempllice, quindi

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$$

e sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} F(x, y) dy \right) dx$$

Integrazione iterata su domini x-semplifici

- Sia D un dominio x-semplifici, quindi

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$$

e sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora

$$\iint_D F(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} F(x, y) \, dx \right) dy$$

Integrazione su domini che sono sia x-semplifici che y-semplifici

- Se il dominio D è sia x-semplifici che y-semplifici allora entrambe le formule di integrazione iterata danno l'integrale

$$\iint_D F(x, y) dx dy$$

Integrazione su domini regolari

- Se D è un dominio regolare allora $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ con D_i non sovrapposti e x o y -semplici. In questo caso

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \sum_i \iint_{D_i} F(x, y) dx dy$$

e ciascun integrale $\iint_{D_i} F(x, y) dx dy$

può essere calcolato usando l'integrazione iterata.

Esercizio

- Sia $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ e sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$F(x, y) = 2 - x + y$$

- Calcolare

$$\iint_D F(x, y) \, dx \, dy$$

Esercizio

- Sia $D = \{(x, y) \mid 2 \geq x \geq 1, y \geq 1, y \leq x\}$ e sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$F(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}$$

- Calcolare

$$\iint_D F(x, y) dx dy$$

Esercizio

- Sia $D = \{(x, y) \mid 2 \geq x \geq 1, 1 - x \geq y \geq -1\}$ e sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$F(x, y) = \sin(y^2)$$

- Calcolare

$$\iint_D F(x, y) \, dx \, dy$$