Lezione 17/12

Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Convergenza puntuale e convergenza totale

- Teorema: Data una successione di funzioni $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ tale che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente allora
  - ! La serie converge puntualmente ad una funzione f(x) definita su [a,b].
  - ! La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente e

$$|f(x)|\leq\sum|f_n(x)|\leq\sum a_n$$

  - ! Se le f_n sono continue allora f è continua

Derivabilità e integrazione

- Inoltre,
  - Se le f_n sono integrabili e continue allora f è integrabile e
  $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)\right) dx = \sum \int_a^b f_n(x)\,dx$$
  - Se le f_n sono derivabili e $\Sigma f'_n$ converge totalmente allora f è derivabile e
  $$f'(x) = \left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f'_n(x)$$

Dimostrazione

- Dimostriamo solo che se le f_n sono integrabili e continue allora f è integrabile e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)\right) dx = \sum \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Esempio

- Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ ha raggio di convergenza R allora converge totalmente in ogni intervallo chiuso [a,b] contenuto in (x_0-R,x_0+R).
- Dimostrazione: Sia $r=max(|a-x_0|,|b-x_0|)$. Si ha che r<R e $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n| r^n$

Siccome $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty$ la serie converge totalmente

Serie derivata di una serie di potenze

- La serie delle derivate di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ è $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$

Si verifica che la serie delle derivate ha lo stesso raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e quindi converge totalmente in ogni intervallo [a,b] all'i nterno dell'intervallo di convergenza.

- Possiamo quindi derivare e integrare le serie di potenze termine a termine.

Esempi

- Serie geometrica: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Quindi

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t}\right) dt = -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Altri esempi

- Serie geometrica: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Quindi

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

e

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt = \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

Convergenza agli estremi degli intervalli di convergenza

- Criterio di Abel: Sia $R \in (0, +\infty)$ il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ converge allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim_{x \to R^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)$$

- Analogamente, se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$ converge allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n = \lim_{x \to -R^+} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)$$

Esempi

- $$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \quad \text{e} \quad -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(-1)^n$$

converge quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \to -1^+} \ln(1-x) = \ln(2)$$

- $$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

converge quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \lim_{x \to 1^+} artan\, x = \frac{\pi}{4}$$

Convergenza totale delle serie trigonometriche

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|+|d_n|$ converge allora

la serie trigonometrica

$$\frac{c_0}{2}+\sum_{h=1}^{+\infty}(c_h\cos(hx)+d_h\sin(hx))$$

converge totalmente in $[0,2\pi]$

Convergenza puntuale delle serie trigonometriche

- Teorema: Se la successione a_h è monotona decrescente e tende a zero allora le serie trigonometriche

$$\sum_{h=1}^{+\infty} a_h \cos(hx), \quad \sum_{h=1}^{+\infty} a_h \sin(hx)$$

convergono puntualmente in $(0,2\pi)$

Le serie $$\sum_{h=1}^{+\infty} (-1)^h a_h \cos(hx), \quad \sum_{h=1}^{+\infty} (-1)^h a_h \sin(hx)$$

convergono puntualmente per ogni $x \in [0,2\pi]$, $x \neq \pi$.

Esempio: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(nx)$$

Convergenza puntuale vs convergenza in media quadratica

- Abbiamo visto che se f è in $L^2(T)$ allora la sua serie di Fourier converge a f in media quadratica.
- La serie di Fourier converge a f puntualmente?

Esempio

- Sia F il prolungamento periodico di $f:[-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$, f(x)=x.
- Verificare se la serie di Fourier di f converge puntualmente a f.

Funzioni regolari a tratti

- Una funzione $f:[0,T]\rightarrow\mathbb{R}$ si dice regolare a tratti se è limitata in [0, T] e l'intervallo [0,T] si può decomporre in un numero finito di intervallini in cui f è continua e derivabile e inoltre agli estremi degli intervallini esistono finiti i limiti di f(x) e f'(x)

Convegenza puntuale delle serie di Fourier

- Se f è periodica di periodo T, regolare a tratti in [0,T] allora, se S[f] è la sua serie di Fourier, si ha che
  - ! per ogni punto esistono

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$$

  - ! S[f] converge puntualmente in x_0 a

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Osservazione

- Se f è regolare a tratti e continua in [0,T] allora S[f] converge puntualmente a f in (0,T) e, se f(0)=f(T), converge puntualmente a f in [0,T] (e quindi ovunque).

Funzioni monotone a tratti

- Una funzione si dice monotona a tratti in [0,T] se l'intervallo [0,T] si può decomporre in un numero finito di intervallini su cui la funzione è monotona

Convergenza puntuale delle serie di Fourier

- Se f è periodica di periodo T, limitata e monotona a tratti in [0,T] allora, se S[f] è la sua serie di Fourier, si ha che
  - ! per ogni punto esistono

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$$

  - ! S[f] converge puntualmente in x_0 a

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Osservazione

- Se f è continua e monotona a tratti in $[0,T]$ allora $S[f]$ converge puntualmente a f in $(0,T)$ e, se $f(0)=f(T)$, converge puntualmente a f in $[0,T]$.

Derivabilità della serie di Fourier

- Se $f:[0,T]\rightarrow \mathbb{R}$ è in $C^1([0,T])$, f' è regolare a tratti in [0,T] e inoltre vale f(0)=f(T) (condizione di raccordo) allora S[f] si può derivare termine a termine e la serie derivata converge puntualmente a f' in (0,T). Se inoltre f'(0)=f'(T) allora la serie derivata converge puntualmente a f' in [0,T].

Esempio

- Sia F il prolungamento periodico di

$$f:[-\pi,\pi]\rightarrow \mathbb{R} \quad f(x)=x^2$$

- Verificare se S[F] converge puntualmente a f in [0,T]
- Sia G il prolungamento periodico di f'. Calcolare S[F] e S[G].