

Analisi Matematica 2

XI esercitazione

1. PROBLEMA Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x) = x^2$. Calcolare, usando la serie di Fourier del prolungamento periodico di f , la somma delle serie

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{h^2}, \quad \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{h^2}.$$

2. PROBLEMA Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x) = x^2$ e $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $g(x) = x$.

- (1) Calcolare, usando la serie di Fourier del prolungamento periodico di f , la serie di Fourier del prolungamento periodico di g .
- (2) Sia $h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $h(x) = x^3$. Calcolare, usando le serie di Fourier dei prolungamenti periodici di f e g , la serie di Fourier del prolungamento periodico di h .

3. PROBLEMA Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x) = x^2$. Calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

usando la serie di Fourier del prolungamento periodico di f .

4. PROBLEMA Per ciascuna delle seguenti serie determinare quali convergono puntualmente e quali convergono totalmente.

- (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $x \in [-1, 1]$.
- (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$, $x \in [-1, 1]$.
- (3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} x^n$, $x \in [-1, 1]$.
- (4) La serie di Fourier del prolungamento periodico di $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}.$$

- (5) La serie di Fourier del prolungamento periodico della funzione definita su $[0, 2)$ tale che $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

2

5. PROBLEMA Determinare se la serie $\sum \frac{\cos(nx)}{n+1}$ converge puntualmente in $(0, 2\pi)$. In $[0, 2\pi]$?

6. PROBLEMA Sia f la funzione definita ponendo $f(x) = \cos x + 1 - |x|$ su $[-\pi, \pi)$.

- (1) Calcolare la serie di Fourier del prolungamento periodico di f .
- (2) La serie converge puntualmente, in media quadratica, totalmente?

7. PROBLEMA Sia f la funzione periodica di periodo 2π pari e tale che $f(x) = 2 - x$ su $[0, \pi)$.

- (1) Calcolare la serie di Fourier di f .
- (2) La serie converge in media quadratica, puntualmente, totalmente?
- (3) La serie delle derivate converge totalmente?

8. PROBLEMA Usando la serie di Fourier della funzione 2π -periodica tale che $f(x) = x$ su $[-\pi, \pi)$, calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

9. PROBLEMA Sviluppare in serie di Fourier il prolungamento periodico di $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ e dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

10. PROBLEMA Sviluppare in serie di Fourier il prolungamento periodico di $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x|+x}{2}$ e determinare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

11. PROBLEMA Calcolare la serie di Fourier del prolungamento periodico di $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \pi < x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

La serie converge puntualmente, in media quadratica, totalmente?

12. PROBLEMA Calcolare la serie di Fourier del prolungamento periodico di $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - 2\pi(\sin(2x))^3$.

La serie converge puntualmente, in media quadratica, totalmente?
La serie derivata converge totalmente?

