Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 20 12 19

II Prova Simulata

(1) Verificare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2(1+y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione in un intorno della cond. iniziale e in tal caso calcolare la soluzione specificando l'intervallo massimale di def. della soluzione.

→ È un'eq. a variabili separabili

$$\begin{cases} y' = a(x) \cdot b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove

$a(x) = x^2$

$b(y) = 1+y^2$

e $a(x)$ è continua e $b'(y) = 2y$ è continua

↳ per il teorema di esistenza e unicità per l'equazioni a variabili separabili esiste unica una soluzione in un intorno della condizione iniziale

No. ES. ANALISI 2

Date 20.12.14

$$y' = x^2(1+y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2(1+y^2) \qquad \frac{dy}{1+y^2} = x^2 dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int x^2 dx \qquad \arctan(y) = \frac{1}{3}x^3 + c$$

Calcolo c mettendo la cond. iniziale

$$\arctan(1) = c \quad \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \arctan(y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi}{4}$$

$$\downarrow$$

$$y = \tan\left(\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Consideriamo la condizione iniz. $y(0)=1$ in $x=0$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow k=0$$

$$\to \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

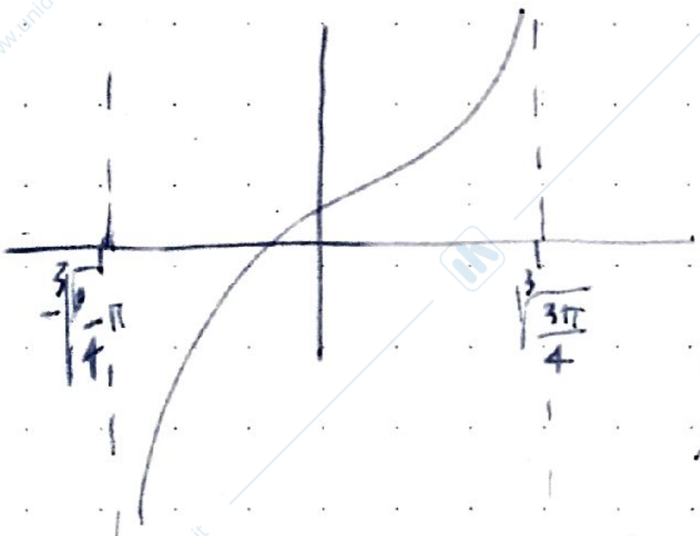
$$\sqrt[3]{-\frac{9}{4}\pi} < x < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$$

abbiamo verificato che sia l'intervallo di massima definizione

$\downarrow$

Riprendiamo $\tan\left(\frac{x^3}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ tra $-\sqrt[3]{+\frac{9}{4}\pi} < x < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$

e facciamo il grafico:



$\Rightarrow$ Osserviamo che:

$$\lim_{x \to -\sqrt[3]{\frac{9}{4}\pi}^+} \tan\left(\frac{x^3}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}} \tan\left(\frac{x^3}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = +\infty$$

INTERVALLO MASSIMO

va verso il bordo del dominio quando vado verso gli estremi dell'intervallo $\left(-\sqrt[3]{\frac{9}{4}\pi}, \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}\right)$

(2) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}\,\hat{\imath} + \left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}+3\right)\hat{\jmath}$$

$\gamma: x^2+xy+2y^2=1$

Calcolare l'integrale di linea del campo F su γ e verificare se il campo è cons.

in caso calc. pot.

$$\longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right) = \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}+3\right) = \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \operatorname{rot} F = 0$

campo irrotazionale

Osserviamo che il dominio è $\mathbb{R}^2$ → simpl. connesso perché è convesso

↳ IL CAMPO È CONSERVATIVO

Osserviamo anche che $x^2+xy+2y^2=1$ è un'ellisse

$$\Rightarrow \oint_\gamma F\,dr = 0$$

Dobbiamo ora calcolare il potenziale:

$$\phi(x,y) = \int \frac{2x}{1+x^2+y^2}\,dx = \ln(1+x^2+y^2) + c(y)$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2} + c'(y)$$

$$\cancel{\frac{2y}{1+x^2+y^2}} + c'(y) = \cancel{\frac{2y}{1+x^2+y^2}} + 3$$

$$c(y) = 3y + k$$

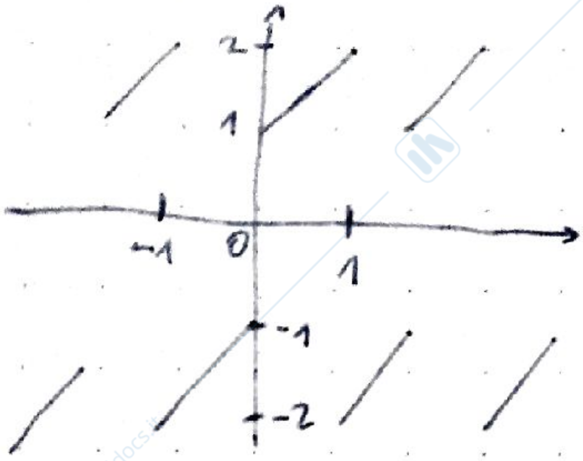
$$\Rightarrow \phi(x,y) = \ln(1+x^2+y^2) + 3y + k$$

3 $f : [-1,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } -1 \le x < 0 \\ x+1 & \text{se } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

Calc. la serie di Fourier del prolungamento periodico di f e calc. somma nei punti $x = \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Disegnamo innanzitutto la funzione e quindi tal prol. per.



f è dispari $a_h = 0$

$$b_h = \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{2}{T}} \int_{-1}^{1} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{2} h x\right) = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(\pi h x)\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 (x+1)\sin(\pi h x)\,dx = 2\int_0^1 \underbrace{x}_{g}\,\underbrace{\sin(\pi h x)}_{f}\,dx + 2\int_0^1 \sin(\pi h x)\,dx =$$

parti

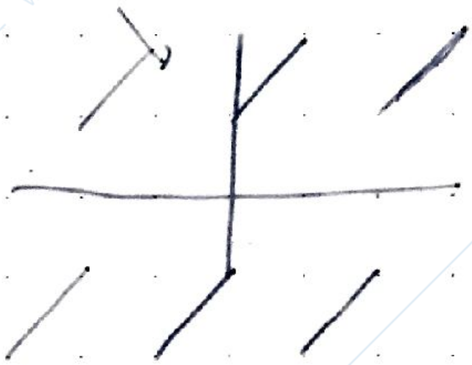
$$= -\frac{2\cos(\pi h x)}{\pi h}\Big|_0^1 - 2\,\frac{x\cos(\pi h x)}{\pi h}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(\pi h x)}{\pi h}\,dx =$$

$$= -\frac{4\cos(\pi h)}{\pi h} + \frac{2}{\pi h} + \cancel{2\,\frac{\sin(\pi h x)}{\pi^2 h^2}\Big|_0^1}$$

$$\to b_h = \frac{-4(-1)^h + 2}{\pi h}$$

$$S[F] = +\sum_{h=1}^{+\infty}\left(\frac{-4(-1)^h+2}{\pi h}\right)\sin(\pi h x)$$

il prolungamento periodico è regolare a tratti



- se $k \in \mathbb{Z}$

i punti interi è dove ci sono i salti

$$S[F] = \frac{-1+1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

k dispari, k pari

valore della funzione è in quel punto

- se $\frac{k}{2} \notin \mathbb{Z}$
  - se $\frac{k}{2} = \frac{1}{2} + 2h$ con $h \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow S[F] = \frac{3}{2}$
  - se $\frac{k}{2} = \frac{1}{2} + 2h+1$ $\quad S[F] = -\frac{1}{2}$

Prova simulata bis

(1) Calc. sol. prob. Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = \frac{1}{1+e^x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$k^2 + k = 0 \qquad k(k+1) = 0$

$y_{om}(x) = A e^{-x} + B$

Calcolo W $\qquad y_1 = e^{-x} \qquad y_2 = 1$

$$W = \begin{pmatrix} e^{-x} & 1 \\ -e^{-x} & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^{-1} = \frac{1}{e^{-x}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{+x} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo trovare una sol. particolare

$$y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-e^x}{1+e^x} \\ \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix}$$

$$c_1(x) = \int \frac{-e^x}{1+e^x} = -\ln(1+e^x)$$

$$c_2(x) = \int \frac{1}{1+e^x} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \int \frac{dt}{t(1+t)} =$$

$$t = e^x \qquad dt = e^x dx$$

dove $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$

$$\Rightarrow c_2(x) = x - \ln(e^x+1)$$

$$y_p = -\ln(1+e^x)(y_1 + y_2) + x y_2$$

Integrale generale è

$$y(x) = Ae^{-x} + B - \ln(1+e^x)e^{-x} + x - \ln(1+e^x)$$

$$y(0) = 1 = A + B - \ln(2)$$

$$y'(x) = -Ae^{-x} - \frac{1}{1+e^x} + \ln(1+e^x)e^x + 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$y'(0) = -1 = A \cancel{-\frac{1}{2}} + \ln(2) + \cancel{1} \cancel{-\frac{1}{2}}$$

$$A = 1 + \ln(2)$$

$$A + B - 2\ln 2 = 1$$

$$B = \cancel{1} + 2\ln 2 - \cancel{1} - \ln 2 = \ln 2$$

$$y(x) = (1+\ln(2))e^{-x} + \ln 2 - 2\ln(1+e^x)e^{-x} + x$$

2 $$\iint_D (y-3x)\ln(2x+y)\,dx\,dy$$

$$D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x+1 \leq y \leq 3x+3,\ 3 \leq y+2x \leq 5\}$$

Notiamo:

$$3 \leq \underbrace{y+2x} \leq 5 \qquad 1 \leq \underbrace{y-3x} \leq 3$$

sono proprio quelle da integrare

↳ suggerisce un cambio di variabili

No. ES. ANALISI 2

Date 20 . 12 . 19

$u = -3x + y$

$v = 2x + y$

$\downarrow$

$$\iint_{D'} u \ln(v) \bigcirc \, du\,dv$$

fattore di conversione

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ +2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & +\frac{1}{5} \\ +\frac{2}{5} & +\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

x far vedere come vale

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5}(u - v) \\ y = +\frac{1}{5}(+2u + 3v) \end{cases}$$

$$G(u,v) = \left(-\frac{1}{5}(u-v), \frac{1}{5}(2u+3v) \right)$$

Jacobiana

$$DG = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & +\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Viene come prima

fattore conversione $= |\det DG| = \left| -\frac{1}{5} \right| = \frac{1}{5}$

No. ES. ANALISI 2

Date 20. 12. 19

$\frac{1}{5}\iint_{D'} u \ln(v) \, du \, d\theta$

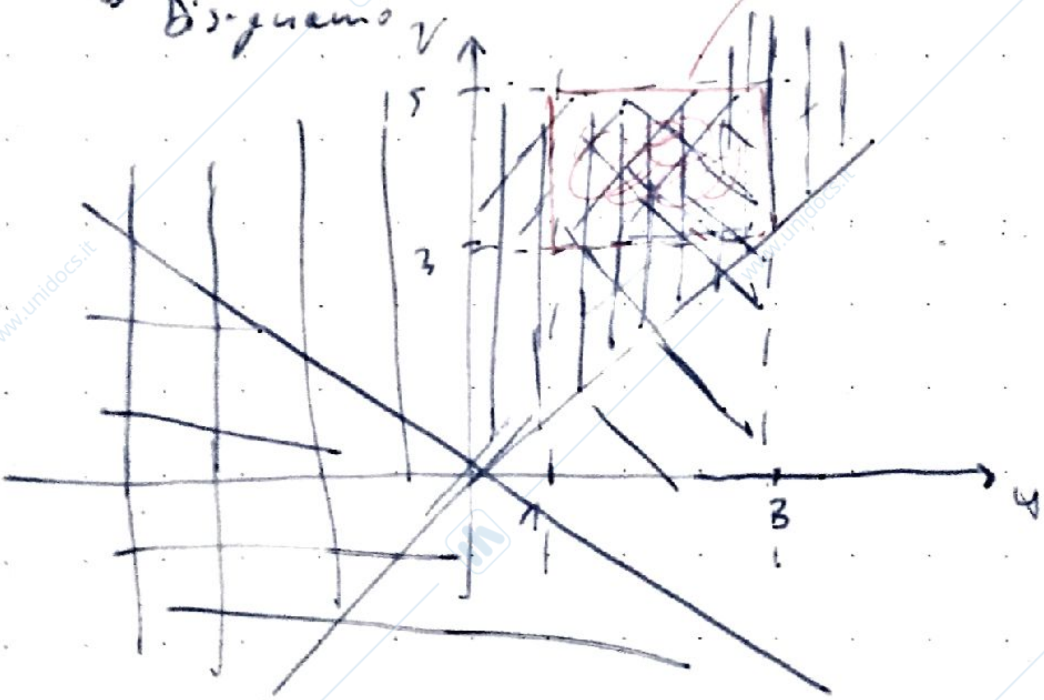
$D' = \{(u,v) \mid 3 \le v \le 5, \ 1 \le u \le 3,$

↳ $x \ge 0$ $\quad x = -\frac{1}{5}(u-v)$

$u - v \le 0 \quad v \ge u$

$y \ge 0 \quad 2u \ge 3v \quad u \ge \frac{3}{2}v$

↳ Disegnamo



→ $\iint_{D'} u \ln(v) \frac{1}{5} \, du \, dv \quad \frac{1}{5}\int_1^3 \left(\int_3^5 u \ln(v) \, dv \right) du =$

No. ES. ANALISI

Date 20.12.1?

$$= \frac{1}{5}\int_1^3 u\left(\int_3^5 \ln(v)\,dv\right)du =$$

per parti

$$= \frac{1}{5}\int_1^3 u\left[v\ln(v)\Big|_3^5 - \int_3^5 v\,\frac{1}{v}\,dv\right]du =$$

$$= \frac{1}{5}\int_1^3 u\left[5\ln 5 - 3\ln 3 - 2\right]du =$$

$$= \frac{1}{5}(5\ln 5 - 3\ln 3 - 2)\,\frac{u^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{1}{5}(5\ln 5 - 3\ln 3 - 2)\overbrace{\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)}^{4} =$$

$$= 4\ln 5 - \frac{12\ln 3}{5} - 8$$