Prova in itinere fino a equazioni differenziali

esercitazione su questo il 7

EDO del II ordine lineari

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Se $a_2(x) = 1$ si dice che l'eq. è in forma normale

si dice omogenea se $f(x)=0$, altrimenti si dice completa

$f(x)$ è detta forzante

Problema di Cauchy

È un sistema in cui si chiede di risolvere l'eq. diff. con delle condizioni iniziali

Teorema: siano $a(x)$ e $b(x)$ e $f(x)$ funz. continue definite su un intervallo I e sia $x_0 \in I$

→ Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

ha una sola soluzione $y \in C^2(I)$

Per risolvere:

- Si cerca l'integrale generale
- si impongono le condizioni iniziali

per calcolare l'integrale dobbiamo considerare:

un operatore associato a un'EDO lineare

$$\underbrace{L(y)}_{\text{l'operatore } L \text{ è una trasformazione lineare}} = y'' + a(x)y' + b(x)y$$

poiché le derivate sono lineari

$L : C^2(I) \to C(I)$ spazi lineari $\Rightarrow$ l'eq. è lineare

ossia rispetta la somma

$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$

e L rispetta il prodotto. $L(ty) = tL(y)$

$\Rightarrow$ L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è il nucleo dell'operatore

$\downarrow$

$\operatorname{Ker} L$

$\downarrow$

$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

L'integrale generale possiamo trovarlo:
trovando una soluzione particolare della non omogenea che poi va sommata a $\underbrace{\text{tutte le soluzioni dell'omogenea associata}}_{\text{integrale generale}}$

es. se y_p è sol. particolare e z sol. dell'eq. omogenea
l'eq. omogenea è $L(y) = f(x)$
x linearità

$$L(y_p + z) = L(y_p) + L(z) = f(x) + 0 = f(x)$$

Viceversa se y_1 è soluzione di $L(y) = f(x)$

$$z = y_1 - y_p$$

$$y_1 = y_p + z$$

$$L(z) = L(y_1 - y_p)$$

$$= L(y_1) - L(y_p) = f(x) - f(x) = 0$$

Teorema: Ci sono 2 soluzioni y_1, y_2 di $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tali che:

- y_1, y_2 sono lin. indip.
- l'integrale generale dell'equazione è dato da $Ay_1 + By_2$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$

$$\hookrightarrow \det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

→ **Dimostrazione:**

Consideriamo le 2 sol. y_1 e y_2 dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x) = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

le funz sono indip.

$$\hookrightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

se z è soluzione dell'equazione allora

$$z = Ay_1 + By_2$$

sia $A = z(x_0)$

$B = z'(x_0)$

$Ay_1 + By_2$ è soluzione e

$$(Ay_1 + By_2)(x_0) = A \underbrace{y_1(x_0)}_{=1} + B \underbrace{y_2(x_0)}_{=0} = A$$

$$(Ay_1 + By_2)'(x_0) = A \underbrace{y_1'(x_0)}_{=0} + B \underbrace{y_2'(x_0)}_{=1} = B$$

→ l'unicità della soluzione ci dice che

$$z = Ay_1 + By_2$$

ogni soluzione è comb. lineare di y_1 e y_2

↳ dunque per una non omogea la soluzione sarà:

$$y = y_p + Ay_1 + By_2$$

Equazioni lineari a coeff. costanti:

Considieriamo:

$$y'' + ay' + cy = 0$$

↳ cerchiamo soluzioni del tipo

$$y = e^{kx}$$

$$y' = k e^{kx}$$

$$y'' = k^2 e^{kx}$$

↳ $k^2 e^{kx} + ak e^{kx} + b e^{kx} = 0$

$$\underbrace{(k^2 + ak + b)}_{} e^{kx} = 0$$

k deve essere la soluzione di $k^2 + ak + b = 0$

↳ • $\Delta > 0$ esistono 2 soluzione $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e $k_1 \neq k_2$

$$y_1 = e^{k_1 x} \qquad y_2 = e^{k_2 x}$$

y_1, y_2 sono indipendenti

↓

$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x}$ — non è una costante quindi sono sol. indipendenti

→ L'integrale generale di

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \text{è:}$$

$$y = Ae^{k_1 x} + Be^{k_2 x}$$

• $\Delta < 0$ esistono 2 soluzioni complesse k_1, k_2 non reali coniugate

$$k_1 = k_0 + i\omega \qquad k_2 = k_0 - i\omega$$

dove $k_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$\Delta < 0$

$$k_{1,2} = \overbrace{\frac{-a}{2}}^{k_0} \pm i \overbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}^{\omega}$$

→ le soluzioni indipendenti sono:

$$z_1(x) = e^{k_1 x} \qquad z_2(x)\ e^{k_2 x}$$

$$z_1(x) = e^{k_0 x} e^{i\omega x} \qquad z_2(x) = e^{k_0 x} e^{-i\omega x}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$z_1(x) = e^{k_0 x}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)) \qquad z_2(x) = e^{k_0 x}(\cos(\omega x) - i\sin(\omega x))$$

Siccome l'eq. è lineare qualsiasi comb. lineare delle soluzioni è soluzione

↓

$$y_1(x) = \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} = e^{k_0 x} \cos(\omega x)$$

$$y_2(x) = \frac{z_1(x) - z_2(x)}{2i} = e^{k_0 x} \sin(\omega x)$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \cot(\omega x)$$ → non è costante

↓

y_1 e y_2 sono lin. indip.

→ L'integrale generale di

$$y'' + ay' + by = 0 \text{ è:}$$

$$y = A e^{k_0 x} \cos(\omega x) + B e^{k_0 x} \sin(\omega x)$$

- $\Delta = 0$ esiste una sola soluzione

$$k_{1,2} = \frac{-a}{2} = k_0$$

$y_1(x) = e^{k_0 x}$ → mi serve un'altra soluzione

Considero

$$y_2(x) = c(x)\, e^{k_0 x}$$

$$y_2'(x) = c'(x) e^{k_0 x} + c(x) k_0 e^{k_0 x}$$

$$y_2''(x) = c''(x) e^{k_0 x} + 2c'(x) k_0 e^{k_0 x} + c(x) k_0^2 e^{k_0 x}$$

↓ sostituiamo nell' eq. differenziale

e troviamo che

$$c''(x)\, e^{k_0 x} + c'(x) \underbrace{(2k_0 + a)}_{k_0 = -\frac{a}{2}} e^{k_0 x} + c(x) \underbrace{(k_0^2 + a k_0 + b)}_{=0} e^{k_0 x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2k_0 + a = 0$$

$$\Rightarrow \quad c''(x)\, e^{k_0 x} = 0$$

$$c''(x) = 0 \qquad c'(x) = c_1$$

$$c(x) = c_1 x + c_2$$

Se $\Delta = 0$ le soluzioni sono

$$y(x) = (c_1 x + c_2)\, e^{k_0 x} = c_1 x e^{k_0 x} + c_2 e^{k_0 x}$$

$$y_1(x) = x e^{k_0 x} \qquad y_2(x) = e^{k_0 x}$$

sono indip. — rapporto non costante

→ l'integrale generale è

$$y(x) = A y_1 + B y_2$$

es.

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

• Integrale generale:

$k^2 - 3k + 2 = 0$ Eq. caratteristica

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

⇒ int. generale è

$$y(x) = A e^{2x} + B e^{x}$$

• Condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = A + B = 1 \\ y'(0) = 2A + B = -1 \end{cases} \qquad y'(x) = 2A e^{2x} + B e^{x}$$

$$\begin{cases} A = 1 - B & \rightarrow A = -2 \\ 2 - 2B + B = -1 & \rightarrow B = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = -2e^{2x} + 3e^{x}}$$

No. ANALISI 2

Date 27. 10. 17

es.

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$k^2 - 2k + 2 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \begin{cases} 1+i \\ 1-i \end{cases}$$

l'integrale gen. è:

$$y(x) = A e^x \cos(x) + B e^x \sin(x)$$

$$y'(x) = A e^x \cos(x) + A e^x \sin(x) + B e^x \sin(x) + B e^x \cos(x)$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = -1 \rightarrow B = -2 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ $y(x) = e^x \cos(x) - 2 e^x \sin(x)$