Analisi Matematica 2
VIII esercitazione

1. Integrali di linea

1. PROBLEMA Sia $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}$ e sia $F : D \to \mathbb{R}^2$ il campo definito ponendo

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Verificare che il campo è conservativo e calcolare un potenziale.

2. PROBLEMA È dato il campo di forze nello spazio

$$F(x,y,z) = (x, y, xz - y).$$

Calcolare il lavoro da esso compiuto su una particella che percorra il segmento che unisce l'origine a $(1,2,4)$.

3. PROBLEMA

(1) Calcolare la circuitazione del campo $F(x,y) = (2x+y, -x+y)$ sul bordo del quadrato di vertici $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ percorso in senso antiorario.

(2) Calcolare la circuitazione del campo $F(x,y) = (2x+y, -x+y)$ sul bordo del quadrato di vertici $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ percorso in senso orario.

(3) Calcolare la circuitazione del campo $F(x,y) = (2x+y, x+y)$ sul bordo del quadrato di vertici $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ percorso in senso antiorario.

4. PROBLEMA È dato il campo di forze $F(x,y) = (cxy, x^6y^2)$ con $c > 0$. Esso agisce su una particella che deve percorrere un arco di curva di equazione $y = ax^b$, con $a > 0$, $b > 0$ dall'origine fino all'intersezione della curva con la retta $x = 1$. Determinare in funzione di c il valore di a che rende indipendente da b il lavoro compiuto dal campo.

5. PROBLEMA È dato il campo scalare

$$U(x,y,z) = e^x \sin y + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}y^2 - y + \tfrac{1}{2}z^2 + z.$$

Siano inoltre F e G i campi di forze

$$F = \nabla U, \quad G = \nabla \times F.$$

(1) Calcolare il lavoro di F lungo la curva $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(2) Calcolare il lavoro di G lungo la curva r.

6. PROBLEMA Sia $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ il campo definito ponendo

$$F(x,y) = (\frac{-y + x^2 + y^2 - yx^2 - y^3}{x^2 + y^2}, \frac{x + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2}).$$

(1) Calcolare l'integrale di linea del campo sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine percorsa in senso antiorario.
(2) Verificare se il campo è conservativo e in tal caso calcolarne un potenziale.

2. Integrazione iterata

7. PROBLEMA Sia $D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ e sia $F : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $F(x,y) = 2 - x + y$.
Calcolare

$$\iint_D F(x,y)dxdy.$$

8. PROBLEMA Sia $D = \{(x,y) \mid 2 \geq x \geq 1,\ y \geq 1,\ y \leq x\}$ e sia $F : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $F(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}$.
Calcolare

$$\iint_D F(x,y)dxdy.$$

9. PROBLEMA Sia $D = \{(x,y) \mid 2 \geq x \geq 1,\ 1 - x \geq y \geq -1\}$ e sia $F : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $F(x,y) = \sin(y^2)$.
Calcolare

$$\iint_D F(x,y)dxdy.$$

10. PROBLEMA Calcolare i seguenti integrali doppi:

(1) $\iint_D (\sqrt{x} + xy^2)dxdy$ dove D è il triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (1,1)$.
(2) $\iint_D \frac{\sin y}{y} dxdy$ dove $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq \pi\}$.

11. PROBLEMA Calcolare
$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx\right) dy.$$

12. PROBLEMA Calcolare i seguenti integrali doppi.

(1) $\iint_D (x+y)dxdy$ dove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \tfrac{\sqrt{2}}{2},\ y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

(2) $\iint_D \cos(\pi y)dxdy$ dove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-2| \leq y \leq 1\}.$$

(3) $\iint_D xydxdy$ dove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2x - x^2\}.$$

(4) $\iint_D (x+y+1)dxdy$ dove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y^2+1,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

(5) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$ dove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq y \leq 1\}.$$

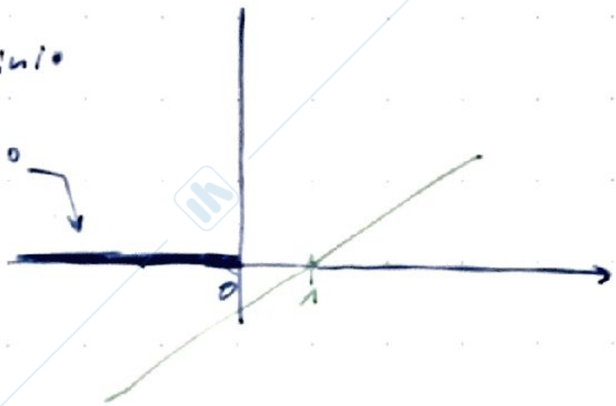
(6) $\iint_D dxdy$ dove D è il parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(3,0)$, $(4,1)$, $(1,1)$.

1. Sia $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \le 0\}$ e sia $F: D \to \mathbb{R}^2$ il campo definito ponendo $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

Verificare che il campo è conservativo e calcolare un potenziale.

$$\nabla \times F = 0$$

il dominio meno questo



è stellato → infatti sia $P_0 = (1,0)$ sia $P(x,y) \in D$

bisogna verificare che il segmento che congiunge P a P_0 è contenuto in D

- se (x,y) non sta sull'asse x allora $y \neq 0$ e la retta r passante per (x,y) e $(1,0)$ sono incidenti in $(1,0)$

$\Rightarrow$ l'intersezione di r con $\{(x,0) \mid x \le 0\}$ è vuota

$\Rightarrow$ il segmento è contenuto in D

- se (x,y) sta sull'asse x allora $x>0$ e $y=0$

il segmento che congiunge $(x,0)$ a $(1,0)$

è $(t,0)$ — $t \in [1,x]$ se $x \geq 1$

— $t \in [x,1]$ se $x \leq 1$

In particolare $t>0$ quindi il segmento è in D

$\Rightarrow$ $\nabla \times F = 0$ e stellato

$\Downarrow$

F è conservativo

→ **Calcolo di un potenziale:**

Si considera F ristretto a $D^+ = \{(x,y) \mid y>0\}$

sappiamo che i potenziali di F sono

le funzioni $\phi(x,y) = \arctg\left(\frac{x}{y}\right) + C$

già calcolato in esempi precedenti

Stessa cosa per $D^- = \{(x,y) \mid y \leq 0\}$

i potenziali sono $\varphi(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c$

$\Rightarrow$ possiamo prendere come potenziale

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y} + c_1 & \text{se } y > 0 \\ \arctan \frac{x}{y} + c_2 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

è una funzione C^∞ continua

$$\lim_{y \to 0^+} \arctan \frac{x}{y} + c_1 = \frac{\pi}{2} + c_1$$

$$\lim_{y \to 0^-} \arctan \frac{x}{y} + c_2 = -\frac{\pi}{2} + c_2$$

$\Rightarrow c_2 = \pi + c_1$

$$\Rightarrow \phi(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c_1 & \text{se } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c_1 + \pi & \text{se } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} + c_1 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

2. $F(x,y,z) = (x, y, xz - y)$ è un campo di forze. Calcolare il lavoro compiuto da una particella che percorre il segmento dall'origine a $(1,2,4)$.

Sia $r(t) = (t, 2t, 4t)$ $t \in [0,1]$ è il segmento che congiunge l'origine a $(1,2,4)$

Calcolo

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_0^1 (t, 2t, (t \cdot 4t) - 2t)\, r'(t)\, dt$$

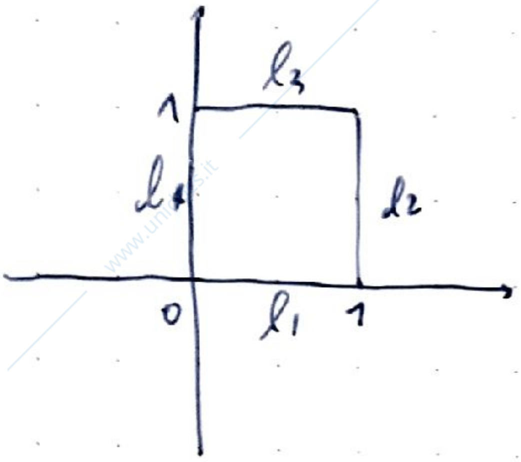
$$= \int_0^1 (t, 2t, 4t^2 - 1) \cdot (1,2,4)\, dt = \int_0^1 (-3t + 16t^2)\, dt =$$

$$= -\frac{3}{2}t^2 + \frac{16}{3}t^3 \Big|_0^1 = \frac{23}{6}$$

(3) $F(x,y) = (2x+y, -x+y)$

Calcolare l'integrale di linea sul bordo del quadrato di vertici $\underbrace{(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)}$ in senso antiorario.

Campo liscio a tratti



$$\int_\gamma F\,d\gamma = \int_{l_1} F\cdot d\gamma + \int_{l_2} F\,d\gamma + \int_{l_3} F\,d\gamma + \int_{l_4} F\,d\gamma$$

lato 1

Parametrizzo i lati:

$l_1(t) = (t,0)$ $t \in [0,1]$

$l_2(t) = (1,0) + t\big((1,1)-(1,0)\big) = (1,t)$

$l_3(t) = (1,1) + t\big((0,1)-(1,1)\big) = (1-t,1)$

$l_4(t) = (0,1) + t\big((0,0)-(0,1)\big) = (0,1-t)$

In generale parametrizzo

$P_1 \to P_2 \;\rightarrow\; P_1 + t(P_2 - P_1)$

$t \in [0,1]$

$$\to \int_\gamma F\,d\gamma = \int_0^1 \underbrace{(2t,-t)}_{F(t,0)} \cdot (1,0)\,dt + \int_0^1 (2+t,-1+t)(0,1)\,dt + \int_0^1 (3-2t,t)(-1,0)\,dt +$$

l_1

$$+\int_0^1 (1-t,1-t)(0,-1)\,dt =$$

$$= t^2\Big|_0^1 + \left(-t+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 + (-3t+t^2)\Big|_0^1 + \left(-t+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$\cancel{1} - \frac{1}{\cancel{2}} - 2 - \frac{1}{\cancel{2}} = -2$$

↳ in senso orario vicino 2

(4) $G(x,y) = (2x+y, x+y)$

Calcolare la circuitazione di F sul bordo del quadrato di vertici $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ percorso in senso antiorario

↳ $\nabla \times G \Rightarrow \dfrac{\partial(2x+y)}{\partial y} \overset{?}{=} \dfrac{\partial(x+y)}{\partial x}$

↳ $1 = 1 \Rightarrow \nabla \times G = 0$

stellato

Cons. $\Leftarrow$ il campo è definito su $\mathbb{R}^2$

$\Downarrow$

$\oint_\gamma G\,dr = 0$

5

$$F(x,y) = \left(\frac{-y + x^2 + y^2 - yx^2 - y^3}{x^2+y^2} , \frac{x + x^3 + xy^2}{x^2+y^2} \right)$$ definito

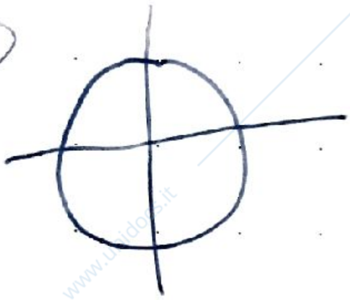
su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

1. Calcolare l'integrale di linea di F sulla circonferenza di raggio 1 e centro $(0,0)$ percorso in senso antiorario

2. Verificare se il campo è conservativo e in tal caso calcolare un potenziale

$$r(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t = [0, 2\pi]$$

(1)



$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t + 1 - \sin t \cos^2 t - \sin^3 t}{1} , \frac{\cos t + \cos^3 t + \cos t \sin^2 t}{1} \right)(-\sin t, \cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin t + 1, 2\cos t)(-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} (2\sin^2 t - \sin t + 2\cos^2 t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 - \sin t)\, dt = 2t \Big|_0^{2\pi} + \cos t \Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

$\Rightarrow$ (2) circ. diversa da 0

$\Rightarrow$ NON È CONS.

No. ES. ANALISI 2

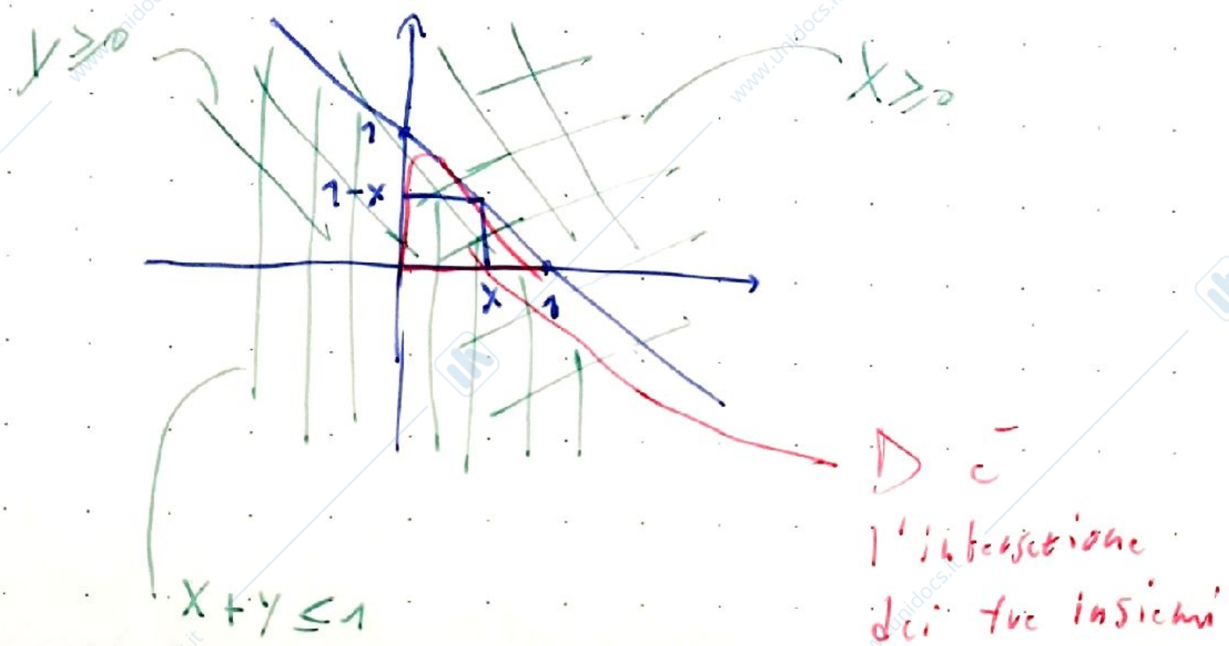
Date 28 · 11 · 19

(6) $D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$

Calcolare

$$\iint_D (2-x+y)\,dx\,dy$$

- Disegnamo il dominio:



Il dominio D è y-semplice

$$\iint_D (2-x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (2-x+y)\,dy \right) dx =$$

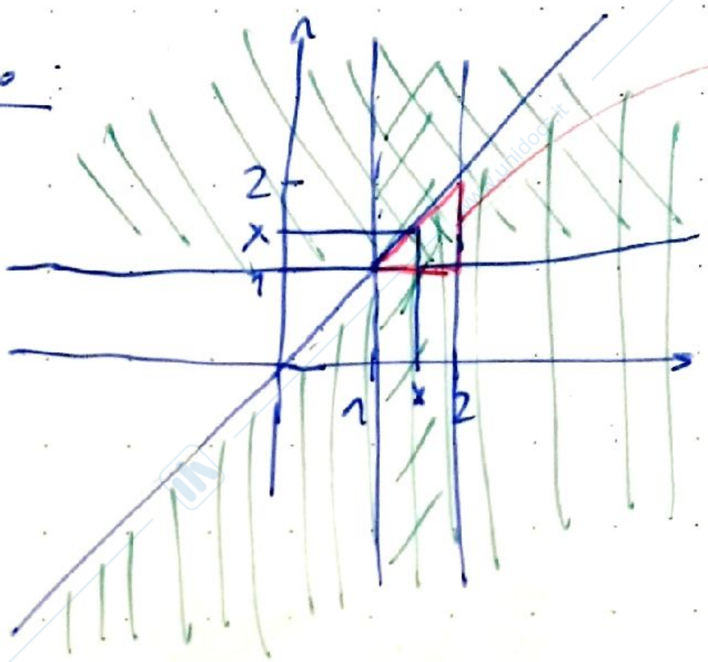
$$\int_0^1 \left(2y - xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(2-2x-x+x^2+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}-x\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{2} - 2x^2 + \frac{5}{2}x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 1$$

7 $D = \{ (x,y) \mid 2 \geq x \geq 1,\ y \geq 1,\ y \leq x \}$

$$\iint_D \frac{1}{x^2 y^2}\, dx\, dy$$

Dominio:



dominio

lo vediamo come y-semplice

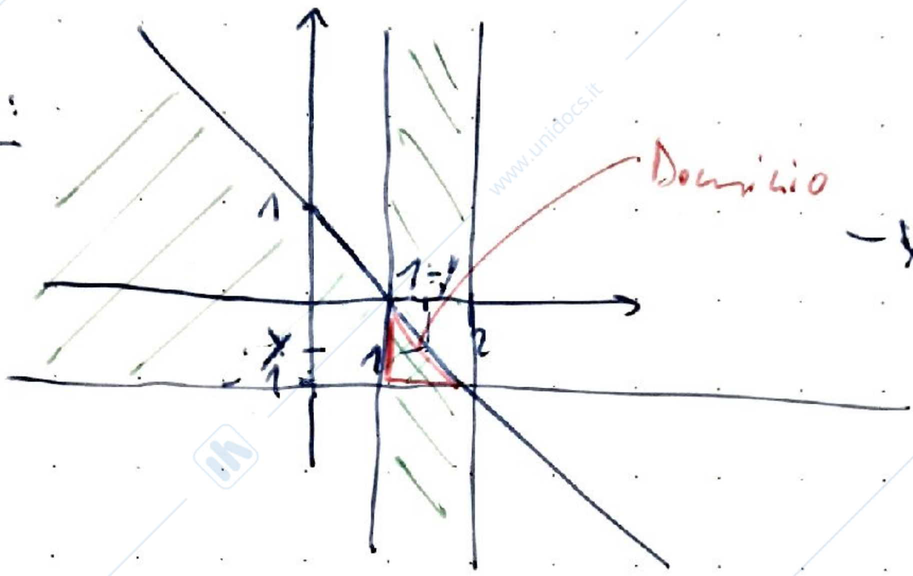
$$\int_1^2 \left(\int_1^x \frac{1}{x^2 y^2}\, dy \right) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2 y} \right)\Big|_1^x dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$\left(+\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \right)\Big|_1^2 = \frac{1}{8} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{1} = \frac{1}{8}$$

8 $D = \{ (x,y) \mid 2 \geq x \geq 1 \ ; \ 1-x \geq y \geq -1 \}$

$$\iint_D \sin(y^2)\, dx\, dy$$

Dominio:



- X-semplice

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_{1}^{1-y} \sin(y^2)\, dx \right) dy = \int_{-1}^{0} \left(\sin(y^2) x \right)\Big|_{1}^{1-y} dy =$$

$$\int_{-1}^{0} \cancel{\sin(y^2)} - \sin(y^2) y - \cancel{\sin(y^2)}\, dy =$$

$$\frac{\cos(y^2)}{2} \Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 1}{2}$$

(9) $D = \{ (x,y) \mid 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2},\ y \le x \le \sqrt{1-y^2} \}$

$\downarrow$ y-semplice

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx \right) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{x^2}{2} + xy \right) \Bigg|_y^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1-y^2}{2} + \sqrt{1-y^2}\, y - \frac{y^2}{2} - y^2 \right) dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2} - 2y^2 + (1-y^2)^{\frac{1}{2}} y \right) dy = \left(\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 2} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}y^3 - \frac{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{12} - \underbrace{\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}}_{\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{3}} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} + 4}{12} = \frac{\cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$