Analisi Matematica 2
I esercitazione

1. PROBLEMA Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin x \sin y}$$

2. PROBLEMA Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)\sin(y)}{yx^2+y^3}.$$

3. PROBLEMA Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{x^3+y^2}{x^3-y}}.$$

4. PROBLEMA Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}.$$

5. PROBLEMA Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

6. PROBLEMA Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}.$$

7. PROBLEMA Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin^2 y}{x^2+2y^2}.$$

8. PROBLEMA Calcolare, se esiste, il limite
$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2 \sin \pi x}{(x-2)^2+(y-1)^2}.$$

9. PROBLEMA Calcolare, se esiste, il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(1+y)+y^2}{x^2+y^2}.$$

10. PROBLEMA Sia $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < \pi\}$ Sia $F : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo
$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{\sin(x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Verificare se F è continua in $(0,0)$.

11. PROBLEMA Sia $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \neq 1\}$. Sia $F : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo
$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln((1-x^2-y^2)^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Verificare se F è una funzione continua in $(0,0)$.

12. PROBLEMA Sia $D = \{(x,y) \mid x^4+y^4 < \pi\}$ Sia $F : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo
$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-x^3y+x^2y^2+y^4}{\sin(x^4+y^4)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Verificare se F è continua in $(0,0)$.

13. PROBLEMA Sia $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sia $F : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $F(x,y) = \frac{e^{x^2y}-1}{x^2+2y^2}$. Verificare se esiste un'estensione continua di F definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

14. PROBLEMA Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo
$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

(1) Determinare se F è continua in $(0,0)$.
(2) Determinare se F è continua in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x \leq 1\}$.

1) calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin(x)\sin(y)}$$

Per questo tipo di esercizi l'idea è rifarsi ai limiti notevoli per una variabile.

es.

$$f(x,y) = xy$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{f(x,y)\to 0} \frac{\sin(f(x,y))}{f(x,y)} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin(x)\sin(y)} \cdot \frac{xy}{xy} = \frac{1\cdot 1}{1} = 1$$

Possiamo anche pensare di applicare gli asintotici

es. per $t \to 0$ $\sin t \sim t$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin(x)\sin(y)} \sim \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x\cdot y} = 1$$

2

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 10 10 19

2.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)\,\sin(y)}{x^2y+y^3} =$$

$$\simeq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{(x^2+y^2)}\,\cancel{(y)}}{\cancel{y}\,\cancel{(x^2+y^2)}} = 1$$

3.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{x^3y^2}{x^3-y}}$$

consideriamo il teorema:

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = L$ — TEST RETTE

$$\Rightarrow \lim_{t\to0^+} F(x_0+t\cos\theta,\, y_0+t\sin\theta) = L$$

$$\lim_{t\to0^+} \sqrt{\frac{(t\cos\theta)^3(t\sin\theta)^2}{(t\cos\theta)^3 - t\sin\theta}} = \underbrace{\lim_{t\to0^+} \sqrt{\frac{t^2\cos^3\theta+\sin^2\theta}{t^2\cos^3\theta-\sin\theta}}}_{*}$$

se $\sin\theta = 0$ $\theta = 0, \pi$

$$\lim_{t\to0^+} \sqrt{\frac{t^2+0}{t^2+0}} = 1$$

dipende da θ

se $\sin\theta \neq 0$

$$\lim_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{t^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}{t^2\cos^2\theta - \sin\theta}} = 0$$

Ho due risultati diversi

↳ IL LIMITE <u>NON</u> ESISTE

4.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$$

TEST RETTE ↳ $$\lim_{t\to 0^+} \frac{(t\cos\theta + t\sin\theta)^2}{t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta} = \frac{t^2(\cos\theta + \sin\theta)^2}{t^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} =$$

$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta)^2}{1}$$ — non esiste

5.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}} \to \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2\sin^2\theta}{\sqrt{t^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}} =$$

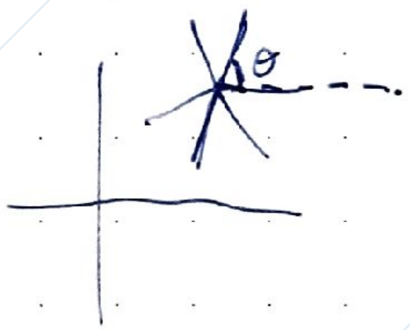
$$= \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}$$ — dipende da θ ↓ ∄

bisogna sempre provare con qualche θ e vedere che dipende da questo

6.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} \to \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2 \cos\theta \sin\theta}{t\,(|\cos\theta| + |\sin\theta|)} = 0$$

Tende a 0^+ poiché prendiamo in considerazione delle semirette (solo quella direzione) poiché consideriamo solo un θ e non il suo supplementare



Applico il teorema delle coordinate polari

Se $\lim_{t\to 0^+} F(x_\theta(t), y_\theta(t)) = L \quad \forall \theta$

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\sup \left| F(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - L \right| \right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = L$$

Procediamo dunque

$$0 \leq \left| \frac{t \cos\theta \sin\theta}{|\cos\theta| + |\sin\theta|} \right| \leq \boxed{f(t)}$$

$f(t) \xrightarrow{t \to 0^+} 0$

$\Downarrow$

tipo teorema carabinieri

$\xrightarrow{t \to 0^+} 0$

Si sfrutta il fatto in questo caso che $\sin\theta$ e $\cos\theta$ sono funzioni limitate.

$|\cos\theta| \leq 1$
$|\sin\theta| \leq 1$

$$0 \leq \frac{|t \cos\theta \sin\theta|}{|\cos\theta| + |\sin\theta|} \leq \frac{|t|}{|\cos\theta| + |\sin\theta|}$$

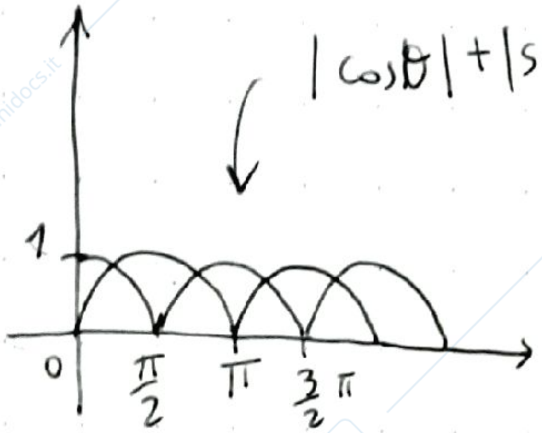
consideriamo poi che

$$0 < |\cos\theta| + |\sin\theta| \leq b$$

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{|\cos\theta| + |\sin\theta|}$$

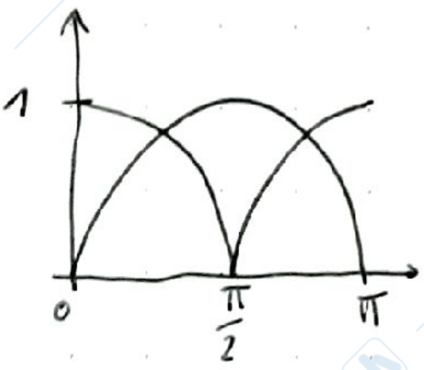
e $\quad 0 < a \le |\cos\theta| + |\sin\theta|$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|\cos\theta| + |\sin\theta|} \le \frac{1}{a}$$



] — a sta in questo range

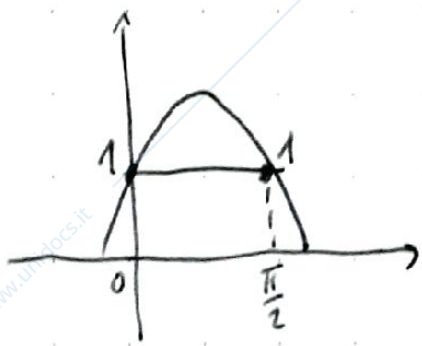
fatto meglio



sia $\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$|\cos\theta| + |\sin\theta| = \cos\theta + \sin\theta$$

$$= \sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\cos\theta + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\sin\theta\right)$$



$$= \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \ge 1$$

poiché (nel range $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$)

$$\rightarrow \frac{1}{|\cos\theta|+|\sin\theta|} \leq 1$$

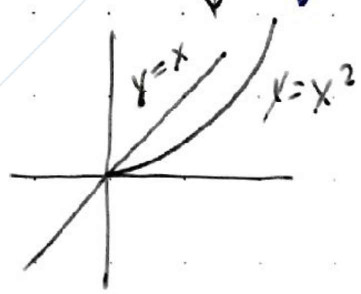
$$\hookrightarrow \frac{t|\cos\theta||\sin\theta|}{|\cos\theta|+|\sin\theta|} \leq \frac{t}{1}$$ — dipende solo da t | non più da θ

per $t \to 0^+$ $\downarrow$ 0

Oppure potevamo osservare che

$$\underbrace{|\sin\theta|}_{0\leq \sin\theta \leq 1} + \underbrace{|\cos\theta|}_{0\leq \cos\theta \leq 1} \geq |\cos\theta|^2 + |\sin\theta|^2$$

il quadrato sta sotto



$$\hookrightarrow |\sin\theta| + |\cos\theta| \geq |\cos^2\theta + \sin^2\theta| = 1$$

$\rightarrow$ quindi il limite tende a $L = 0$

8.

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2 \sin \pi x}{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

$$\hookrightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{(\cancel{1}+t\sin\theta-\cancel{1})^2 \sin\pi(2+t\cos\theta)}{(\cancel{2}+t\cos\theta-\cancel{2})^2+(\cancel{1}+t\sin\theta-\cancel{1})^2}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^2\sin^2\theta \, \sin(\pi(t\cos\theta))}{t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta} = \lim_{t\to 0^+} \sin^2\theta \sin(\pi(t\cos\theta))$$

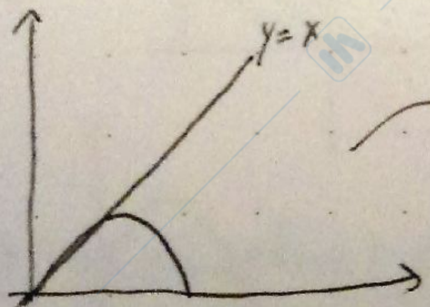
$$= 0$$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2 \sin \pi x}{(x-2)^2+(y-1)^2} = 0}$$

Test

↳ coordinate polari

$$\Big|\underbrace{\sin^2\theta}_{\geq 1} \underbrace{\sin(\pi t\cos\theta)}\Big| \leq f(t)$$



$$\sin(\pi t\cos\theta) \leq \pi t\cos\theta$$

$$\to |\sin^2\theta \sin(\pi t\cos\theta)| \leq 1\cdot|\pi t\cos\theta| \leq \pi|t| \xrightarrow{t\to 0^+} 0$$

9

Mo Tu We ~~Th~~ Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 10.10.19

10.

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{\sin(x^2+y^2)} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Verificare se F è continua in (0,0)

$$\hookrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)=F(0,0)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{\sin(x^2+y^2)}$$

TEST RETTE $\hookrightarrow$ $$\lim_{t\to 0^+} \frac{t\cos\theta\, t^3\sin^3\theta}{\sin(t^2)} \underset{2}{\sim} \frac{t^{\cancel{4}\,2}\cos\theta\sin^3\theta}{\cancel{t^2}}=0$$

TEST COORD. POLARI $\hookrightarrow$ $$|t^2\cos\theta\sin^3\theta|\leq|t^2| \xrightarrow{t\to 0^+} 0$$

$$\to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{\sin(x^2+y^2)}=0$$

$\Rightarrow$ la funzione è continua in (0,0)

2

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^3y + x^2y^2 + y^4}{\sin(x^4+y^4)} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = F(0,0) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - x^3y + x^2y^2 + y^4}{\sin(x^4+y^4)} \sim \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^4+y^4}{x^4+y^4} + \frac{x^2y^2 - x^3y}{x^4+y^4}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 + \frac{x^2y^2 - x^3y}{x^4+y^4}$$

TEST RETTE $\hookrightarrow$ $$\lim_{t\to 0^+} 1 + \frac{\cancel{t^4}\cos^2\theta \sin^2\theta - \cancel{t^4}\cos^3\theta \sin\theta}{\cancel{t^4}(\cos^4\theta + \sin^4\theta)} =$$

$$= 1 + \frac{\cos^2\theta(\sin^2\theta - \cos\theta \sin\theta)}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$$

dipende da θ $\longrightarrow$ non è continua in $(0,0)$

$\hookrightarrow$ infatti se $\theta = 0$ $\lim_{t\to 0^+} \dots = 1$ $\neq$

se $\theta = \frac{\pi}{6}$ $\lim_{t\to 0^+} = 1 + \dots$

11

No. ES. ANALISI 2

Date 10 · 10 · 19

14

a.

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Verificare se F è continua in (0,0)

per questo limite non possiamo usare i metodi:

- metodi sostituzioni (asintotici / limiti notevoli)
- test delle rette
- test coordinate polari

↳ possiamo fare

$$\lim_{(t,0)\to(0,0)} \frac{0^2}{x} = 0$$

$$\lim_{(t^2,t)\to(0,0)} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

limiti diversi → non è continua

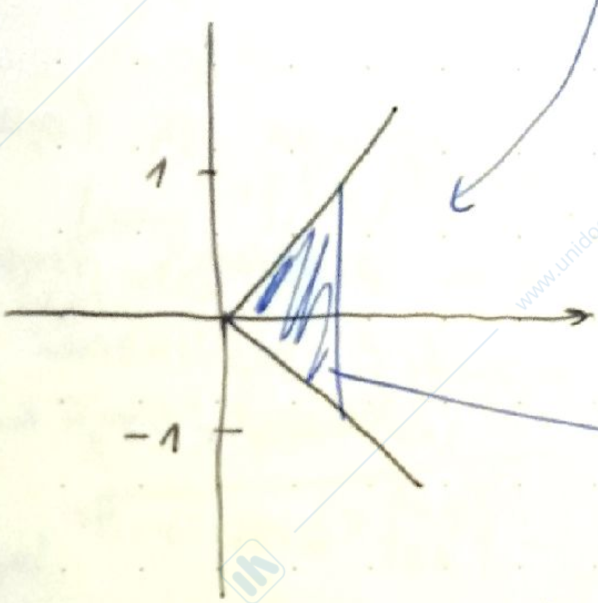
se uso questa curva

No. ES. ANALISI 2

Date 10 · 1 · 19

b. Verificare se F è continua in

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 1\}$



in questa regione dobbiamo verificare il limite in questa

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t^2 \sin^2\theta}{t \cos\theta} = 0 \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

è continua

TEST. COORD. POLARI

$$\frac{|t^2 \overbrace{\sin^2\theta}^{\leq 1}|}{|t \cos\theta|} \leq \frac{2|t|}{\sqrt{2}} \xrightarrow{t \to 0^+} 0$$